MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 8

7 de Junio de 2017

P1. Pruebe que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(x^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} sen(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Indicación: Integre la función $f(z) = e^{iz^2}$ sobre el contorno de un octavo de circunferencia. Además, puede serle útil que $\forall \alpha \in [0, \pi/2]$, $sen(\alpha) \geq 2\alpha/\pi$

P2. Sea $b > 0$. Calcule

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} cos(2bx)dx$$

Para ello, integre la función $f(z) = e^{-z^2}$ sobre el rectángulo de vértices R, $R + ib$, $-R + ib$, $-R$ y tome límite cuando $R \to \infty$, probando que las integrales sobre los lados verticales del rectángulo tienden a cero.

P3. *a)* Pruebe que

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}} dz$$

b) Utilice lo anterior para demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} e^{2x cos(\theta)} d\theta$$

P4. Sea f una función entera, es decir, holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Suponga además que para todo $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq ln(|z| + 1)$. Pruebe que f es constante.