MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 8

24 de Mayo de 2017

P1. Calcule $\int_\gamma f(z)dz$ en los siguientes casos:

a) $f(z) = \bar{z}$, con γ la circunferencia de centro 0 y radio 2 y orientada positivamente.

b) $f(z) = Re(z)$, con γ la semicircunferencia unitaria que pasa por $-i$, 1, i, en ese orden.

c) $f(z) = z^\alpha$, con γ la circunferencia unitaria orientada positivamente, desde $z = 1$.

d) $f(z) = |z|^2$, con γ el cuadrado de vértices 0, 1, $1+i$, i.

P2. Sea $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0\}$. Considere $f : \bar{D} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\bar{D}$ y holomorfa en D. Suponga que existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}, \quad \forall z \in \bar{D}, |z| \geq 1$$

a) Pruebe que $\forall \theta \in [0, \pi/2]$ se tiene

$$\int_0^\infty f(x)dx = e^{i\theta} \int_0^\infty f(e^{i\theta}x)dx$$

Hint: Verifique en forma independiente los casos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. Para $\theta \in (0, \pi/2)$ integre f sobre la curva dada por el contorno del sector circular de ángulo central θ y radio $R > 0$.

b) Utilice lo anterior para $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z)^2}$ y $\theta = \pi/2$ para demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x)^2}dx + \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}dx = 1$$

P3. *a*) Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia unitaria, orientada positivamente. Pruebe que $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{az}}{z}dz = 2\pi i$$

b) Sea Γ el cuadrado de vértices $(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)$. Calcule:

$$\oint_\Gamma \frac{\tan(z/2)}{(z - x_0)^2}\,dz, \quad -2 < x_0 < 2$$