

MA2002-3: Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Profesor:** Gino Montecinos.**Auxiliares:** Vicente Ocqueteau, Sebastián Urzúa B.**Auxiliar 7**

10 de mayo de 2017

1. Resumen

Teorema 1 (Teorema de Cauchy-Goursat). Si f es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo Ω entonces $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$, para todo camino cerrado regular por trozos y simple Γ contenido en Ω .

Teorema 2 (Fórmula de Cauchy). Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $D(\bar{p}, r) \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p, r)$ se tiene $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.

Teorema 3 (Desarrollo en serie de Taylor). Mismas hipótesis de antes. Entonces existe $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tales que $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k (z - p)^k$, $\forall z \in D(p, r)$. Más aún, $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k+1}} dw$.

2. Problemas

P1. Pruebe que si $f \in H(D(z_0, R))$ entonces para todo $r \in]0, R[$ se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Deduzca que para $0 < \theta < 1$,

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + re^{i\theta}) d\theta = 0.$$

P2. (I) Encuentre el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2n+1} \left(\frac{2}{3i}\right)^n (z+4i)^n$.

(II) Encuentre la serie de Taylor de $f(z) = z \log(z)$ en torno a $z_0 = i+1$ y determine su radio de convergencia.

(III) Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f''(z) = 2f(z) + 1$ con $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Encuentre la serie de potencias de f en torno a 0 y su radio de convergencia.

P3. (a) Pruebe que para $b \in (-1, 1)$, se tiene $\int_0^{\infty} \frac{1 - b^2 - x^2}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2 x^2} dx = \frac{\pi}{2}$. **Indicación:** Integre

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \text{ en un contorno rectangular adecuado.}$$

(b) Si además $b \neq 0$, pruebe que

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1 - b^2 - x^2)^2 + 4b^2 x^2} dx = \frac{1}{4b} \ln \frac{1+b}{1-b}.$$