MA2002-3: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 6

03 de Mayo de 2017

Teorema 1. *Una función de variable compleja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ ssi es Fréchet-derivable en $(x_0.y_0)$ como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0)$, con $f = u + iv$.*

En tal caso, $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$.

P1. *a*) Muestre que toda raíz $n-$ésima de la unidad z, con $z \neq 1$ satisface la ecuación ciclotómica: $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$

b) Considere un polígono regular de n lados inscrito en el círculo unitario y sean $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_{n-1}$ las $n-1$ diagonales obtenidas al unir un vértice v_0 a todos los demás. Pruebe que el producto de los largos de las $n-1$ diagonales es n.

P2. Determine si las siguientes funciones son holomorfas en todo $\mathbb{C}$:

a) $f(z) = \bar{z}$

b) $f(z) = (z^3 + 1)e^{-y}(\cos(x) + i\sin(x))$, $z = x + iy$.

P3. Se definen los operadores $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1}$$

a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las condiciones de Cauchy Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

b) Si f es holomorfa en Ω, con Ω abierto y conexo, muestre que $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$, $\forall z \in \Omega$.

c) Explicite en términos de $u = Re(f)$ y $v = Im(f)$ a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.

P4. Sea $f \in H(\Omega)$, con Ω abierto y conexo, tal que para cualquier punto $z \in \Omega$, $f'(z) = 0$. Muestre que f es constante.

P5. Encuentre los discos de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n\geq 1} n^{\frac{1}{n}}(z-1)^n$

b) $\sum_{n\geq 1} n!(z-i)^{n!}$