Pauta Auxiliar 5

P1

a) Calculamos:

$$rot(F) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6xyz^2 + 1 - 6xyz^2 \\ 3y^2z^2 - 3y^2z^2 \\ 2yz^3 - 2yz^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que podemos escribir

$F = F_1 + F_2$, donde
- $F_1 = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xyz^2)$
- $F_2 = (0,0,y)$

Como F_1 es de clase $\mathcal{C}^1$ (y definida en todo $\mathbb{R}^3$), entonces $rot(F_1) = 0 \Longleftrightarrow F_1$ es conservativo. (*)

y $F_2 = (0,0,f(y))$, con $f(y) = y$.

//

(*) Otra forma de argumentar que F_1 es conservativo, es diciendo (spoileando) que en (b) se le encontrará un potencial.

b) Buscamos f, campo escalar, tal que $F_1 = \nabla f$.

$$\Longleftrightarrow \underbrace{y^2z^3 = \frac{\partial f}{\partial x}}_{(1)}, \quad \underbrace{2xyz^3 = \frac{\partial f}{\partial y}}_{(2)}, \quad \underbrace{3xy^2\cancel{z}z^2 = \frac{\partial f}{\partial z}}_{(3)}.$$

Integrando (1) c/r a x:

$xy^2z^3 + C_1(y,z) = f(x,y,z)$, reemplazando en (2):

$2x\cancel{yz^3} = 2x\cancel{y}z^3 + \dfrac{\partial C_1(y,z)}{\partial y}$, integrando c/r a y:

$C_2(z) = C_1(y,z)$

$\Rightarrow f(x,y,z) = xy^2z^3 + C_2(z)$, reemplazando en (3):

$3x\cancel{y^2z^2} = 3x\cancel{y}z^2 + \dfrac{\partial C_2(z)}{\partial z}$, integrando c/r a z:

$C = C_2(z)$, $C \in \mathbb{R}$ arbitrario.

$\therefore f(x,y,z) = xy^2z^3 + C$ es un potencial de F_1, $\forall C \in \mathbb{R}$.

c) Como $F = F_1 + F_2 \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}} \vec{F_2} \cdot d\vec{r}$

- Como F_1 es conservativa

$\Rightarrow \displaystyle\int_{\mathcal{C}} F_1 \cdot d\vec{r} = f(\text{final}) - f(\text{inicial})$.

Encontremos los puntos iniciales y final:

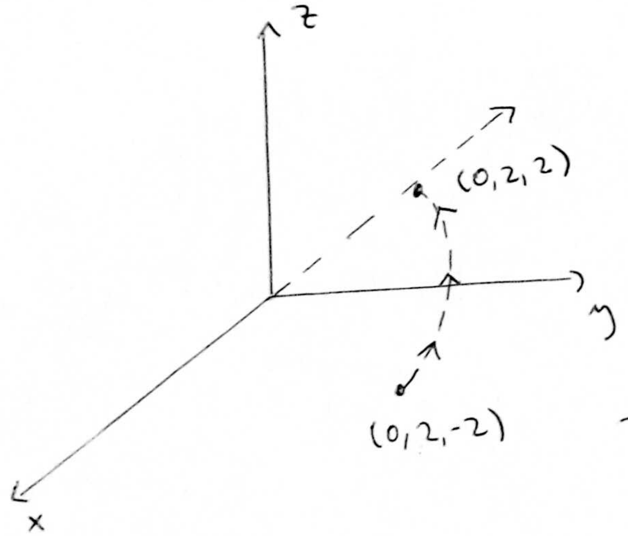
③

Notemos que $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2=4,\ x^2+(y-2)^2+z^2=4,\ x\leq 0\}$

Reemplazando la primera condición en la segunda:

$$\underbrace{x^2+z^2}_{4} + (y-2)^2 = 4 \iff (y-2)^2 = 0 \iff y=2.$$

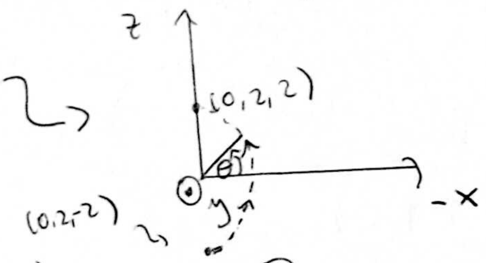
Así, $\mathcal{C} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2=4,\ y=2,\ x\leq 0\}$



· Final: cuando $x=0, z=2$

· Inicial: cuando $x=0, z=-2$.

(recordar que $\mathcal{C}$ está orientada de abajo hacia arriba).



$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F_1\cdot d\vec{r} = f(0,2,2) - f(0,2,-2) = c - c = 0.$$

· $\int_{\mathcal{C}} F_2\cdot d\vec{r}$: Parametrización de $\mathcal{C}$: $\vec{r}(\theta) = (2\cos(\theta), 2, 2\operatorname{sen}(\theta))$,

$\theta\in[-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow \vec{r}\,'(\theta) = (-2\operatorname{sen}(\theta), 0, 2\cos(\theta))$.

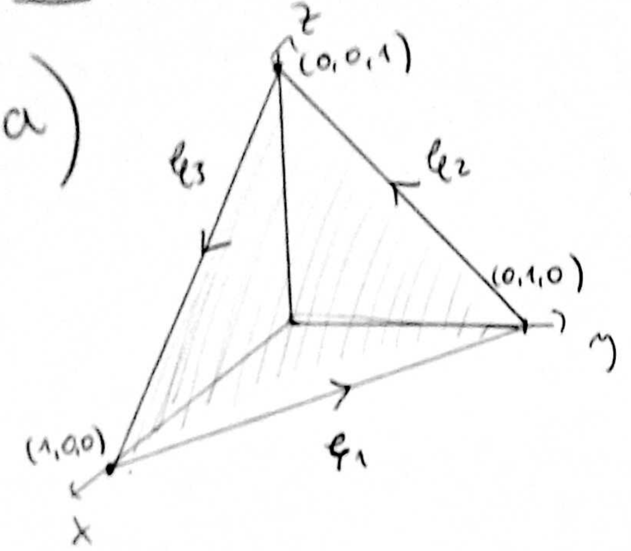
$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F_2\cdot d\vec{r} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\operatorname{sen}(\theta)\\0\\2\cos(\theta)\end{pmatrix} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos(\theta)\,d\theta$$

$$= 4\operatorname{sen}(\theta)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4(\operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen}(-\pi/2)) = 4(1+1) = 8.$$

$$\therefore \int_{\mathcal{C}} F\cdot d\vec{r} = 8.$$

P2

a)



$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} F\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} F\cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_2} F\cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_3} F\cdot d\vec{r}$$

$\underline{\mathcal{C}_1}$: Recta que une el punto de partida $(1,0,0)$ con el de llegada $(0,1,0)$:

$$\vec{r}_1(t) = (1,0,0) + t((0,1,0)-(1,0,0)),\ t\in[0,1].$$
$$= (1-t, t, 0)$$

(Ver anexo en la parte de la aux 4 si hay dudas sobre esta típica parametrización).

$$\Rightarrow \vec{r}_1\,'(t) = (-1,1,0).$$

$$\Rightarrow F(\vec{r}(t)) = ((1-t)^2 - t^2, t^2, -(1-t)^2)$$
$$= (1-2t, t^2, -(1-t)^2)$$

$$\Rightarrow F(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1-2t \\ t^2 \\ -(1-t)^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t^2+2t+1.$$

$$\therefore \int_{\mathcal{C}_1} F\cdot d\vec{r} = \int_0^1 F(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^1 (t^2+2t-1)\,dt.$$

$$= \left(\frac{t^3}{3}+t^2-t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\ //$$

Para $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$, se hace análogamente (uniendo los puntos respectivos para cada parametrización). Por "simetría" de F, las integrales darán $\frac{1}{3}$ (al igual que en $\mathcal{C}_1$)

$$\therefore \oint_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_3} F \cdot d\vec{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1. \quad //$$

b) Notemos que la región no es simplemente conexa. Sin embargo, podemos "completar" la región (agregándole el agujero), aplicar teorema de Green sobre el círculo completo encerrado por $\mathcal{C}_1$, y luego restarle el momento de inercia dado por el círculo pequeño, $\mathcal{C}_2$. Esto es:

Si D_i es el círculo rodeado por $\mathcal{C}_i$, entonces, aplicando teo. Green (sobre algún campo por determinar, $F = (M, N)$)

$$\Rightarrow \iint_{D_i} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dS = \oint_{\mathcal{C}_i} M\,dx + N\,dy$$

y como $S = D_1 \setminus D_2$

$$\Rightarrow \iint_{S} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dS = \oint_{\mathcal{C}_1} (M\,dx + N\,dy) - \oint_{\mathcal{C}_2} (M\,dx + N\,dy) \quad (*).$$

Como buscamos calcular I_x, debemos buscar M, N tq $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = y^2$. Basta tomar, por ejemplo, $N = 0$, $M = -\frac{1}{3} y^3$.

Así:

$$I_x = \iint_S \rho y^2 \, dS \overset{(*)}{=} \rho\left(\oint_{\mathcal{C}_1} -\frac{1}{3} y^3 dx - \oint_{\mathcal{C}_2} -\frac{1}{3} y^3 dx \right)$$

Parametrizando:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{C}_1 : \vec{r}_1(\theta) = (b\cos(\theta), b\,sen(\theta)) \\ \mathcal{C}_2 : \vec{r}_2(\theta) = (a\cos(\theta), a\,sen(\theta)) \end{array}\right\} \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\vec{r}_1{}'(\theta) = (\overbrace{-b\,sen(\theta)}^{\text{"}dx\text{"}}, \overbrace{b\cos(\theta)}^{\text{"}dy\text{"}})$$

$$\vec{r}_2{}'(\theta) = (\underbrace{-a\,sen(\theta)}_{\text{"}dx\text{"}}, \underbrace{a\cos(\theta)}_{\text{"}dy\text{"}})$$

Reemplazando:

$$I_x = \rho\left(\int_0^{2\pi} -\frac{1}{3} b^3 sen^3(\theta)(-b\,sen(\theta))d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} a^3 sen^3(\theta)(-a\,sen(\theta))d\theta \right)$$

$$= \frac{\rho}{3}(b^4 - a^4)\int_0^{2\pi} sen^4(\theta)\, d\theta = \frac{\rho}{3}(b^4 - a^4)\int_0^{2\pi} (sen^2(\theta))^2 d\theta$$

$$= \frac{\rho}{3}(b^4 - a^4)\int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{\rho}{3 \cdot 4}(b^4 - a^4)\int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos(2\theta) + \left(\frac{1 + \cos(4\theta)}{2}\right)\right] d\theta$$

$$= \frac{\rho}{12}(b^4 - a^4)(2\pi + \pi) = \frac{\overbrace{\rho\underbrace{\pi(b^2 - a^2)}_{\substack{\text{Área} \\ \text{anillo.}}}}^{M}(b^2 + a^2)}{4}$$

$$= \frac{M}{4}(b^2 + a^2).$$

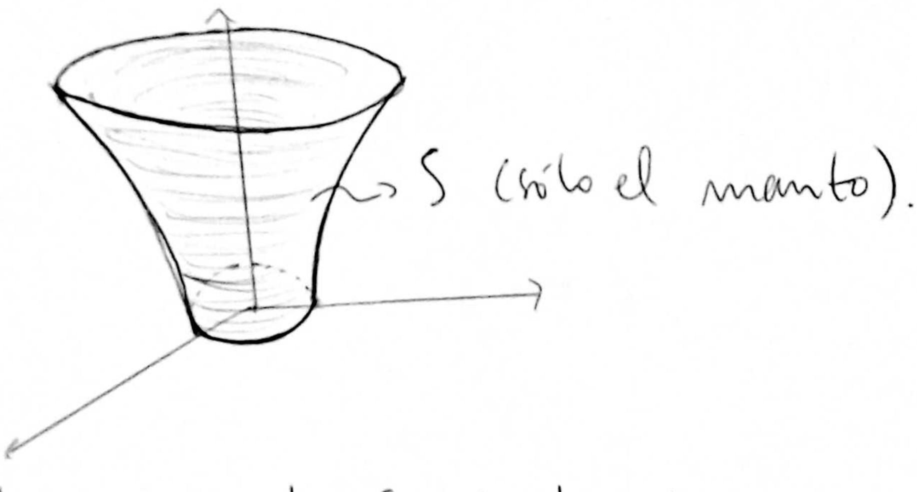
//

P3

a) Notemos que todas las componentes de F son $\mathcal{C}^1$, salvo la componente $\hat{z}$, que tiene el término $(x^2+y^2)^{1/4}$, que resulta no derivable para $x=y=0$, $\forall z\in\mathbb{R}$

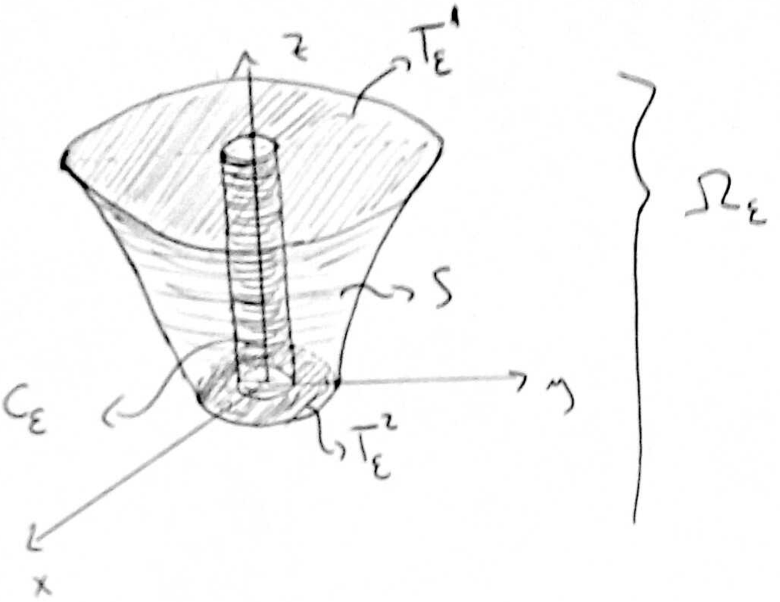
Es decir, F es $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underbrace{(0,0,z) : z\in\mathbb{R}}_{\text{eje } z}\}$.

b) Región:



La idea es usar teo. Gauss, sobre alguna región adecuada: Como F no es $\mathcal{C}^1$ en el eje z, debemos considerar una región (cerrada) que no lo contenga; consideremos entonces:

$\Omega_\varepsilon = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \varepsilon^2 \leq x^2 \leq e^z,\ 0\leq z\leq 1\}$, para cada $\varepsilon>0$.



C_ε: cilindro de radio ε.

T_ε^i: Tapas (que no incluyen el círculo de radio ε).

De esta manera, encerramos (al agregar las tapas) una región cuyo manto es S, donde la función es C^1 (pues el eje z no está en Ω_ε). Por lo que podremos usar Teo Gauss en Ω_ε:

$$\iint_{\partial\Omega_\varepsilon} F \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}(F)\, dV$$

Donde $\operatorname{div}(F) = (2 + \cancel{y\cos(x-y)}) + (-1 + \cancel{\operatorname{sen}(x-y)} - \cancel{y\cos(x-y)}) + (-\operatorname{sen}(x-y)) = 1$

$$\Rightarrow \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} F \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega_\varepsilon} dV \overset{\text{cilíndricas}}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{e^{z/2}} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = 2\pi \int_0^1 \frac{\rho^2}{2} \Big|_\varepsilon^{e^{z/2}} dz$$

$$= \pi \int_0^1 (e^z - \varepsilon^2) dz = \pi(e - 1 - \varepsilon^2) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \pi(e-1).$$

Por otro lado:

$$\iint_{\partial\Omega_\varepsilon} F\cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_S F\cdot d\vec{S}}_{\text{Lo que buscamos}} + \underbrace{\iint_{T_\varepsilon^1} F\cdot d\vec{S}}_{(1)} + \underbrace{\iint_{T_\varepsilon^2} F\cdot d\vec{S}}_{(2)} + \underbrace{\iint_{C_\varepsilon} F\cdot d\vec{S}}_{(3)}$$

(1): Sobre T_ε^1: La normal es $\hat{n} = \hat{z} = (0,0,1)$.

$\Rightarrow F\cdot\hat{n} = (x^2+y^2)^{1/4} - \text{sen}(x-y)$, y $\iint_{T_\varepsilon^1} \text{sen}(x-y)\,dS = 0$ (por simetría).

cilíndricas

$$\Rightarrow \iint_{T_\varepsilon^1} F\cdot\hat{n}\,dS = \int_\varepsilon^{e^{1/2}}\int_0^{2\pi} \rho^{1/2}\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{2}{5}\rho^{5/2}\Big|_\varepsilon^{e^{1/2}}$$

$$= \frac{4}{5}\pi\left(e^{5/4} - \varepsilon^{5/2}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{4}{5}\pi e^{5/4}$$

(2): Sobre T_ε^2; la normal es $\hat{n} = -\hat{z} = (0,0,-1)$, y de manera similar (salvo que $\rho\in[\varepsilon,1]$ aquí):

$$(2) = -\frac{4}{5}\pi\left(1-\varepsilon^{5/2}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -\frac{4}{5}\pi.$$

(3): C_ε se puede parametrizar como:

$\vec{F}(\theta,z) = (\varepsilon\cos(\theta), \varepsilon\,\text{sen}(\theta), z)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $z\in[0,1]$.

y $\hat{n} = -\hat{\rho}$ (de manera que sea exterior a Ω_ε).

Luego:

$$\|F(\vec{r}(\theta,z))\|^2 = 4x^2 + y^2\operatorname{sen}^2(x-y) + 2xy\operatorname{sen}(x-y) + y^2 + y^2\operatorname{sen}^2(x-y) - 2y^2\operatorname{sen}(x-y) + \sqrt{x^2+y^2} + z^2\operatorname{sen}^2(x-y) - 2z(x^2+y^2)^{1/4}\operatorname{sen}(x-y)$$

$$= 4x^2 + (2y^2+z^2)\operatorname{sen}^2(x-y) + (2xy - 2z(x^2+y^2)^{1/4} - 2y^2)\operatorname{sen}(x-y) + \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\overset{\varphi_\varepsilon}{\leqslant} 4\varepsilon^2 + (2\varepsilon^2+1) + (2\varepsilon^2 - 0 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon$$

$$= 10\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 \leq 12 \quad (\varepsilon \in (0,1))$$

$$\Rightarrow \left|\iint_{C_\varepsilon} F\cdot d\vec{S}\right| \leq \iint_{C_\varepsilon} \|F\|\,dS \leq \int_0^1\int_0^{2\pi} 12\underbrace{(\varepsilon\, d\theta\, dz)}_{dS} = 12\varepsilon\cdot 2\pi = 24\varepsilon\pi$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \qquad \therefore \text{Por Sandwich, } \iint_{C_\varepsilon} F\cdot d\vec{S} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Finalmente:

$$\iint_S F\cdot d\vec{S} = \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} F\cdot d\vec{S} - \iint_{T_\varepsilon^1} F\cdot d\vec{S} - \iint_{T_\varepsilon^2} F\cdot d\vec{S} - \iint_{C_\varepsilon} F\cdot d\vec{S} \quad \Big/ \ \varepsilon\to 0$$

$$\Rightarrow \iint_S F\cdot d\vec{S} = \pi(e-1) - \frac{4}{5}\pi e^{5/4} + \frac{4\pi}{5} - 0$$

$$\therefore \iint_S F\cdot d\vec{S} = \pi\left[(e-1) + \frac{4}{5}(1-e^{5/4})\right]$$