Resumen Esquemático del curso MA26B

Oscar Peredo A. *

18 de Junio de 2003

1. Introducción

Este resumen tiene por objetivo presentar la mayor parte de los contenidos del curso ma26b de forma simple y sin demostraciones. Se incluyen esquemas mnemotécnicos fáciles de asimilar y definiciones extraídas de los apuntes del profesor. La intención de estas pagínas no es reemplazar los apuntes oficiales del curso, sino dar un enfoque resumido de estos, abarcando menor cantidad de contenidos, con enfasís en los tópicos principales de cada capítulo.

2. Curvas y Superficies en $\mathbf{R}^3$

2.1. Curvas

Definicion 1 *Un conjunto* Γ *se llama* ***curva*** *si existe una función continua* $\vec{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ *llamada* ***parametrización de la curva*** *tal que*

$$\boxed{\Gamma = \vec{r}([a, b]) = \{\vec{r}(t) \in \mathbf{R}^3 | t \in [a, b], a, b \in \mathbf{R}\}} \tag{1}$$

Además, Γ puede ser:

- **Suave** si $\vec{r} \in \mathcal{C}$.
- **Regular** si $\|\dot{\vec{r}}\| > 0$.
- **Simple** si $\vec{r}$ es inyectiva.
- **Cerrada** si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Definicion 2 *Se llama* ***velocidad*** *al vector* $\vec{v}(t) : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ *tal que*

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}} \tag{2}$$

Definicion 3 *Se llama* ***rapidez*** *al escalar* $s(t)$ *determinado por*

$$\boxed{s(t) = \|\vec{v}\| = \|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\|} \tag{3}$$

Definicion 4 *Se llama* ***vector tangente*** *al vector* $\hat{t}$ *determinado por*

*Alumno de Ingeniería de la Universidad de Chile

$$\boxed{\hat{t} = \frac{\vec{v}}{s(t)} = \frac{1}{\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\|} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \tag{4}$$

2.1.1. Sistemas de Coordenadas Ortogonales

Los SCO[1] mas conocidos son los sistemas Cartesiano, Cilíndrico, Esférico y Toroidal. Comenzaremos por listar los **factores escalares**, de suma importancia en la obtención de gradientes, divergencias y rotores, entre otros usos.

Para $\mathbf{R}^3$, los factores escalares, en un SCO son los siguientes:

- $h_u = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\|$
- $h_v = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|$
- $h_w = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\|$

Cartesianas	$h_x = 1$	$h_y = 1$	$h_z = 1$
Cilíndricas	$h_\rho = 1$	$h_\theta = \rho$	$h_z = 1$
Esféricas	$h_r = 1$	$h_\theta = r\sin\varphi$	$h_\varphi = r$

2.1.2. Gradiente en Coordenadas Ortogonales

$$\boxed{\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}} \tag{5}$$

2.1.3. Elemento de Volumen dV

$$\mathrm{dV} = \mathrm{h}_u h_v h_w du dv dw \tag{6}$$

Cilíndricas	$dV = \rho d\rho d\theta dz$
Esféricas	$dV = r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi$

2.1.4. Longitud de Arco (Γ)

Definicion 5 *La* ***longitud de arco*** *de* Γ *se define como la siguiente integral*

$$\boxed{\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\frac{\partial \vec{r}(\tau)}{\partial \tau}\| d\tau} \tag{7}$$

[1] Ver apunte para descripción de los Sistemas de Coordenadas principales

2.1.5. Integral de Línea

Definicion 6 *La integral de línea de una función $f : D \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ sobre Γ, parametrizada por la función $\vec{r} : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ se representa por*

$$\boxed{\int_\Gamma f dl = \int_a^b f(\vec{r}(\tau)) \| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \| d\tau} \tag{8}$$

2.1.6. Parametrización en longitud de arco

Primero se presnta la función $s(t)$, que representa la distancia recorrida por la curva en el instante t

$$\boxed{s(t) = \int_a^t \| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \| d\tau} \tag{9}$$

, luego la parametrizacion en longitud de arco queda enunciada por

(s)=(t(s))
(10)

Con esto, (4) se puede definir como

$$= \frac{d\vec{\sigma}(s)}{ds} = \frac{1}{\| \frac{d\vec{r}(t(s))}{dt} \|} \frac{d\vec{r}(t(s))}{dt}$$
(11)

2.1.7. Curvatura, Radio de Curvatura, Vector Tangente y Vector Normal

Curvatura	$k(s) = \| \frac{dT}{ds}(s) \| = \| \frac{d^2\vec{\sigma}}{ds^2}(s) \|$	$k(t) = \frac{\| \frac{dT}{dt}(t) \|}{\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \|}$
Radio de curvatura	$R(s) = \frac{1}{k(s)}$	$R(t) = \frac{1}{k(t)}$
Vector Tangente	$T(s) = \frac{d\vec{\sigma}}{ds}(s) = \hat{t}$	$T(t) = \frac{1}{\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \|} \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$
Vector Normal	$N(s) = \frac{1}{\| \frac{dT}{ds}(s) \|} \frac{dT}{ds}(s)$	$N(t) = \frac{1}{\| \frac{dT}{dt}(t) \|} \frac{dT}{dt}(t)$

2.1.8. Vector Binormal

Definicion 7 *Se llama* ***vector binormal*** *al vector B obtenido de la operación*

B=T $\times N$
(12)

, donde T es el vector tangente y N es el vector normal.

Una consecuencia de esta definición es la siguiente propiedad

Propiedad 1 Γ *es plana* $\Longleftrightarrow \frac{dB}{ds} = 0$

2.1.9. Torsión

Definicion 8 *Se define la* ***torsión*** τ *de* Γ *como*

$$\tau(s) = - < \frac{dB}{ds}, N > \tag{13}$$

$$\tau(t) = -\frac{< \frac{dB}{dt}, N >}{\| \frac{d\vec{r}}{dt} \|} \tag{14}$$

2.1.10. Fórmulas de Frenet

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

2.2. Superficies

Definicion 9 *Se dice que* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *es* ***Conexo*** *sí y solo sí* $\forall x, y \in \Omega$, $\exists \Gamma$ *regular por trozos tal que* $\Gamma \subseteq \Omega$ *con* x *e* y *puntos extremos de* Γ.

Definicion 10 *Se dice que* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *es* ***Convexo*** *sí y solo sí* Γ *es segmento de recta.*

2.2.1. Vectores Tangentes en (u_0, v_0)

$$\hat{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{1}{\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \|} \tag{15}$$

$$\hat{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{1}{\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \|} \tag{16}$$

2.2.2. Plano tangente a la superficie en (u_0, v_0)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r}_0 + \alpha \hat{t}_u(u_0, v_0) + \beta \hat{t}_v(u_0, v_0) \tag{17}$$

2.3. Vector Normal

$$= \hat{t}_u \times \hat{t}_v \cdot \frac{1}{\|\hat{t}_u \times \hat{t}_v\|} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

Otra forma de representar el plano tangente, utilizando el vector normal, es

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{r}_0, \hat{n} \right\rangle = 0 \tag{20}$$

2.3.1. Área de Superficie S

Definicion 11 *El **área de supericie** de S parametrizada por la función* $\vec{r} : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *se define como la siguiente integral doble*

$$\boxed{\begin{gathered} Area(S) = \int\int_U \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\| dudv \\ dA = \|\tfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \tfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\| dudv \end{gathered}} \tag{21}$$

2.3.2. Integral de Superficie

Definicion 12 *La integral de superficie de una función* $f : D \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *sobre* S*, parametrizada por la función* $\vec{r} : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *se representa por*

$$\boxed{\int\int_S f dA = \int\int_U f(\vec{r}(u,v)) \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\| dudv} \tag{22}$$

3. Integración de Campos Vectoriales

3.1. Integral de Trabajo

Definicion 13 *La integral de trabajo de una función* $F : D \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *sobre* Γ*, parametrizada por la función* $\vec{r} : [a,b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ *se representa por*

$$\boxed{\int_\Gamma F \bullet d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(\tau)) \bullet \frac{d\vec{r}}{dt}(\tau) d\tau} \tag{23}$$

3.2. Campos Conservativos

Propiedad 2 $F = -\nabla \vec{g} \Longrightarrow \oint_\Gamma F \bullet d\vec{r} = 0$

3.3. Integral de Flujo

Definicion 14 *La integral de flujo de una función* $F : D \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *sobre* S*, parametrizada por la función* $\vec{r} : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *se representa por*

$$\boxed{\int\int_S F \bullet \hat{n} dA = \int\int_U F(\vec{r}(u,v)) \bullet (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v})(u,v) du dv} \tag{24}$$

4. Teoremas del Cálculo Vectorial

4.1. Teorema de la Divergencia

Definicion 15 *Dada $F : U \subseteq \mathbf{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 se define la **divergencia** de F como*

$$\boldsymbol{div}F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{25}$$

$$donde\ F = f_1\hat{\imath} + f_2\hat{\jmath} + f_3\hat{k} \tag{26}$$

Teorema 1 *Sea $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos orientado según la normal exterior. Sea $F : \Omega' \rightarrow \mathbf{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\Omega' \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, entonces*

$$\boxed{\int\int_{\partial\Omega} F \bullet \hat{n} dA = \int\int\int_{\Omega} \boldsymbol{div}F dV} \tag{27}$$

4.2. Divergencia en Coordenadas Curvilíneas

$$divF = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right) \tag{28}$$

4.3. Teorema de Stokes

Definicion 16 *Dada $F : U \subseteq \mathbf{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 se define el **rotor** de F como*

$$\boldsymbol{rot}F = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z})\hat{\imath} + (\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x})\hat{\jmath} + (\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})\hat{k} \tag{29}$$

$$con\ F = f_1\hat{\imath} + f_2\hat{\jmath} + f_3\hat{k} \tag{30}$$

4.4. Rotor en Coordenadas Curvilíneas

$$rotF = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} \mathrm{h}_u\hat{u} & \mathrm{h}_v\hat{v} & \mathrm{h}_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ \mathrm{h}_u F_u & \mathrm{h}_v F_v & \mathrm{h}_w F_w \end{vmatrix} \tag{31}$$

Teorema 2 *Sea $S \subseteq \mathbf{R}^3$ una superficie regular por trozos cuyo borde[2] Γ = "∂S" es una curva cerrada, simple y regular por trozos. Sea $F : \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\Lambda \supseteq S \cup \partial S$ con Λ abierto, entonces*

$$\boxed{\int\int_{S} \boldsymbol{rot}F \bullet \hat{n} dA = \oint_{\Gamma} F \bullet d\vec{r}} \tag{32}$$

[2] Ver apunte

Γ se recorre en sentido antihorario con respecto a $\hat{n}$ (se satisface regla de la mano derecha).

Propiedad 3 *Si F es conservativo de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$, con Ω conexo $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{rot}F = 0$.*

Propiedad 4 *Si $F \in \mathcal{C}^1(\Omega), \boldsymbol{rot}F = 0$ y Ω es un dominio apropiado[3] $\Longrightarrow$ F es conservativo.*

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{div}F = \vec{\nabla} \bullet F \\ \mathbf{rot}F = \vec{\nabla} \times F \\ \nabla f = \vec{\nabla} f \end{array}}$$

4.5. Fórmula de Green o Integración por partes

Para las funciones $f, g : \Omega \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $F : \Omega \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ se cumplen las siguintes fórmulas

$$\boxed{\int\int\int_{\Omega} \nabla f \bullet F dV = \int\int_{\partial\Omega} fF \bullet \hat{n} dA - \int\int\int_{\Omega} f\mathbf{div}F dV} \tag{33}$$

Para el caso $F = \nabla g$,

$$\boxed{\int\int\int_{\Omega} \nabla f \bullet \nabla g dV = \int\int_{\partial\Omega} f\nabla g \bullet \hat{n} dA - \int\int\int_{\Omega} f\mathbf{div}\nabla g dV} \tag{34}$$

Ahora utilizando la notacion $\frac{\partial g}{\partial \hat{n}} = \nabla g \bullet \hat{n}$ y $\mathbf{div}(\nabla g) = \Delta g$,

$$\boxed{\int\int\int_{\Omega} \nabla f \bullet \nabla g dV = \int\int_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial \hat{n}} dA - \int\int\int_{\Omega} f\Delta g dV} \tag{35}$$

[3] Ver apunte

5. Variable Compleja

Las definiciones de **producto, inverso y módulo** en $\mathbf{C}$ no se darán por razones obvias.

5.1. Continuidad y Derivabilidad en C

5.1.1. Continuidad

$f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, con Ω abierto , $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
y $z = x + iy$ es **continua** en z_0

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (z_n)_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \mathbf{C} \text{ , con } z_n \to z_0 \text{ , se tiene } f(z_n) \to f(z_0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y $v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ son continuas en (x_0, y_0)

5.1.2. Derivabilidad

$f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ con Ω es abierto es derivable en z_0.

$$\Longleftrightarrow$$

$$\text{Si } \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \text{ existe.}$$

Si f es derivable en Ω se dice que f es **holomorfa** en Ω.

Propiedad 5 *f es derivable en $z_0 \Longrightarrow f$ es continua en z_0*

5.2. Condiciones de Cauchy - Riemann

$z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, si f es derivable en $x_0 + iy_0$

$$\Longrightarrow$$

F es Frechet - Diferenciable en (x_0, y_0) vista como $f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ y además

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\wedge$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Si $f : \Omega \subseteq \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ holomorfa en Ω tal que $f(z) = u(x, y) + i \cdot 0$

$$\Longrightarrow$$

$f'(z) = 0$, lo cual indica que si Ω es conexo, $f = c, c \in \mathbf{R}$ constante

5.3. Series de Potencias

Definicion 17 *El **radio de convergencia** de una serie de potencias $s(z)$ se define de la siguiente forma*

$$R=\frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \tag{36}$$

La serie

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

converge en

$$D(a, R) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - a| < R\}$$

y es holomorfa en $D(a, R)$.

5.4. Funciones Hiperbólicas

$$\boxed{\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)} \tag{37}$$

$$\boxed{\sinh(z) = \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y)} \tag{38}$$

$$\boxed{\cosh^2(z) - \sinh^2(x) = 1} \tag{39}$$

$$\boxed{\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}} \tag{40}$$

$$\boxed{\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}} \tag{41}$$

5.5. Funciones Trigonométricas

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \tag{42}$$

$$\boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \tag{43}$$

$$\boxed{\cos(z) = \cosh(iz)} \tag{44}$$

$$\boxed{\sin(z) = \frac{1}{i}\sinh(iz)} \tag{45}$$

$$\boxed{\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}} \tag{46}$$

$$\boxed{\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}} \tag{47}$$

5.6. Integración en C

La integracion en el cuerpo de los complejos no difiere sustancialmente a la integracion en los reales, lo fundamental en esta sección es no olvidar que todas las operaciones deben realizarse cuidando de multiplicar en el sentido complejo y saber cuando es posible trasladarse a un problema de integracion equivalente en los reales y luego volver al problema complejo y aplicar algunas técnicas.

Definicion 18 *Sea $f : \Omega \subseteq \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ continua. Sea $\Gamma \subseteq \boldsymbol{C}$, con $\Gamma \subset\subset \Omega$. La parametrizacion de Γ es una función $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{C}$ con $\Gamma = \gamma([a,b])$. La **integral de f sobre** Γ se define mediante*

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt} \tag{48}$$

o equivalentemente

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \bullet d\vec{r} + i \int_\Gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \bullet d\vec{r}} \tag{49}$$

con $d\vec{r} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt.$

Definicion 19 *La **primitiva** F en* $\Omega = \begin{cases} \boldsymbol{C},\ k \geq 0 \\ \boldsymbol{C}\backslash\{z_0\}, k < 0 \end{cases}$ *de una funcion $f : \Omega \to \boldsymbol{C}$, con*

$$f(z)=(z - z_0)^k, \text{ con } k \neq -1 \tag{50}$$

esta definida por

$$F(z)=\frac{1}{k+1}(z - z_0)^{k+1} \tag{51}$$

Corolario 1 *Si $s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, con radio de convergencia R , entonces*

$$\forall\Gamma \text{ cerrado, } \Gamma \subseteq D(z_0, R), \oint_{\gamma^*} s(z)dz = 0 \tag{52}$$

5.7. Teorema de Cauchy-Goursat

Teorema 3 *Sea $\Omega \subseteq \boldsymbol{C}$ un abierto simplemente conexo*[4] *y no vacío. Sea $f \in H(\Omega)$. Entonces, para todo camino cerrado $\Gamma \subseteq \Omega$ se tiene*

$$\boxed{\oint_{\gamma^*} f(z)dz = 0} \tag{53}$$

Teorema 4 *Sea $\Omega \subseteq \boldsymbol{C}$ un abierto conexo. Consideremos $f : \Omega \setminus \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\} \to \boldsymbol{C}$ una función holomorfa en $\Omega \setminus \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$. Sea $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino cerrado simple recorrido en sentido antihorario. Sea D la región encerrada por Γ. Supongamos que $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\} \subseteq D \subseteq \Omega$ y escojamos $\epsilon > 0$ tal que $\forall j = 1, \ldots, n, \overline{D}(p_j, \epsilon) \subseteq D$ y además $\overline{D}(p_j, \epsilon) \cap \overline{D}(p_k, \epsilon) \neq \emptyset$ si $k \neq j$. Sea $\gamma_j(t) = p_j + \epsilon^{it}, t \in [0, 2\pi]$, entonces*

$$\boxed{\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j^*} f(z)dz} \tag{54}$$

5.8. Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 5 *Sea $f : \Omega \subseteq \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$,$r < 0$ y $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$, entonces*

$$\boxed{\forall z_0 \in D(p,r), f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz} \tag{55}$$

,recorrida en sentido antihorario.

5.9. Serie de Taylor

Teorema 6 *Sea $f : \Omega \subseteq \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ continua en Ω abierto, holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}, r < 0$ tal que $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$, entonces*

$$\boxed{\exists (c_k)_{k \in \boldsymbol{N}} \ \ \textit{tal que,} \ \ \textit{f(z)}{=}\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k, \forall z \in D(p,r)} \tag{56}$$

,con

$$\boxed{c_k = \frac{f^{(k)}}{k!}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw}$$

Corolario 2 *Sea $f : \Omega \subseteq \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ continua en Ω abierto, holomorfa en Ω salvo en un número finito de puntos $\Longrightarrow f$ es holomorfa en Ω y f es de clase C^{∞} en Ω.*

[4]Ver apunte para definicion de conjunto simplemente conexo.

6. Residuos

Definicion 20 *Un punto $p \in \boldsymbol{C}$ es un* ***punto singular aislado*** *si y solo si $\exists R > 0$ tal que $f \in H(D(p,R) \setminus \{p\})$ pero f no es holomorfa en p.*

Definicion 21 *Un punto singular aislado es* ***evitable*** *si y solo si*

$$\exists L_0(p) \text{ tal que } L_0(p) = \lim_{z \to p} f(z)$$

Definicion 22 *Un punto singular aislado es* ***polo de orden m*** *si y solo si*

$$\exists m \geq 1 \text{ (el menor entero), tal que } L_m(p) = \lim_{z \to p} (z-p)^m f(z)$$

Definicion 23 *Un punto es* ***polo simple*** *si y solo si es polo con $m = 1$.*

6.1. Teorema de los residuos de Cauchy

Definicion 24 *El* ***residuo*** *de una función f en un punto p se denota* ***res***(f,p) *y se define por*

$$\boxed{\boldsymbol{res}(f,p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} f(z)dz}$$

(57)

$$\boxed{\boldsymbol{res}(f,p) = \frac{g^{(m-1)}(p)}{(m-1)!}}$$

, donde $g(z) = \begin{cases} \text{(z-p)}^m f(z) & \text{si } z \neq p \\ L_m & \text{si } z=p \end{cases}$.

Esta fórmula solo es útil directamente cuando p es un polo simple, es decir $m = 1$, en cuyo caso

$$\boxed{\mathbf{res}(f,p) = g(p) = L_m = \lim_{z \to p} (z-p)^m f(z)}$$

En el caso gnral, como $g \in H(\Omega)$ en particular, $g^{(k)}(z)$ es continua en $\Omega, \forall k \geq 0$ y en consecuencia

$$\boxed{\mathbf{res}(f,p) = \lim_{z \to p} \frac{g^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} = \lim_{z \to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} [(z-p)^m f(z)]}$$

Teorema 7 *Sea f una función meromorfa*[5] *en un abierto Ω y sea P el conjunto de los polos de f. Dado un camino cerrado simple Γ que no pasa por los puntos en P, es decir, $\Gamma \cap P = \emptyset$, el cual encirra una región $D \subseteq \Omega$, entonces $D \cap P$ es finito (o vacio), digamos $D \cap P = \{p_1, \dots, p_n\}$ y si Γ esta recorrida en sentido antihorario entonces*

$$\boxed{\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{res}(f, p_j)} \tag{58}$$

Como ejemplo de aplicación consideremos una funcion del tipo $\dfrac{g(z)}{h(z)}$ con $g(p) \neq 0, h(p) = 0$ y p es polo simple. Tenemos que

$$\mathbf{res}(\frac{g(z)}{h(z)}, p) = \frac{g(p)}{h'(p)}$$

Otro ejemplo de aplicación es la regla de LĤopital para las funciones $f, g \in H(\Omega), p \in \Omega, n \geq 1$, con $g(p) = \cdots = g^{(n-1)}(p) = 0 \neq g^n(p)$, la cual esta caracterizada por

$$\text{lím}_{z\to p} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} \text{no existe} & \mathrm{f}^{(k)}(p) \neq 0, \exists k \in \{0, \dots, n-1\} \\ \dfrac{f^{(n)}(p)}{g^{(n)}(p)} & \mathrm{f}^{(k)}(p) = 0, \forall k \in \{0, \dots, n-1\} \end{cases}$$

7. Evaluación de Integrales

7.1. Senos y Cosenos

Utilizando el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, en las expresiones (42) y (43), obtenemos

$$\boxed{\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}} \tag{59}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}} \tag{60}$$

[5] Ver apunte

7.2. Integrales Impropias y Dominios no acotados

Definicion 25 *Se llama* ***semiplano superior de C*** *al conjunto*

$$H{=}\{z \in \boldsymbol{C} \mid Im(z) \geq 0\} \tag{61}$$

$$\text{y su interior } \; Int(H){=}\{z \in \boldsymbol{C} \mid Im(z) > 0\} \tag{62}$$

Teorema 8 *Sea f meromorfa en* $\boldsymbol{C}$*, P el conjunto de polos de f,*

- *f no tiene polos en* $\boldsymbol{R}$*,* $P \cap \boldsymbol{R} = \emptyset$.
- $Int(H) \cap P$ *es finito.*
- $\exists K \geq 0, M \geq 0, p > 1$ *tal que* $\mid f(z) \mid \leq \dfrac{K}{\mid z \mid^p}, \forall z \in H, \mid z \mid \geq M$.

entonces

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z \in Int(H) \cap P} \boldsymbol{res}(f, z)} \tag{63}$$

Corolario 3 *Si p y q son polinomios primos entre sí, q no tiene ceros reales y* $grado(q) \geq grado(p) + 2$*, entonces*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{q(z)=0, Im(z)>0} \boldsymbol{res}(\frac{p}{q}, z)} \tag{64}$$

Teorema 9 *Sea f meromorfa en* $\boldsymbol{C}$*, P el conjunto de polos de f,*

- *f tiene polos reales simples,* $P \cap \boldsymbol{R}$ *es finito.*
- $Int(H) \cap P$ *es finito.*
- $\exists K \geq 0, M \geq 0, p > 1$ *tal que* $\mid f(z) \mid \leq \dfrac{K}{\mid z \mid^p}, \forall z \in H, \mid z \mid \geq M$.

entonces

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z \in Int(H) \cap P} \boldsymbol{res}(f, z) + \pi i \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{res}(f, a_j)} \tag{65}$$

Corolario 4 *Si p y q son polinomios primos entre sí, los ceros de q sobre* $\boldsymbol{R}$ *son simples y* $grado(q) \geq grado(p) + 2$*, entonces*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{q(z)=0, Im(z)>0} \boldsymbol{res}(\frac{p}{q}, z) + \pi i \sum_{q(a)=0, a \in \boldsymbol{R}} \boldsymbol{res}(\frac{p}{q}, a)} \tag{66}$$

Teorema 10 *Sea f meromorfa en* $\boldsymbol{C}$, *P el conjunto de polos de f,*

- $P \cap \boldsymbol{R} = \emptyset$.
- $Int(H) \cap P$ *es finito.*
- $\exists K \geq 0, M \geq 0, p > 1$ *tal que* $\mid f(z) \mid \leq \dfrac{K}{\mid z \mid^p}, \forall z \in H, \mid z \mid \geq M$.

entonces

$$\boxed{\lim_{R\to\infty} \int_{c_R} f(z)e^{isz}dz = 0} \tag{67}$$

,luego

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = 2\pi i \sum_{w\in Int(H)\cap P} \boldsymbol{res}(f(z)e^{isz}, w)} \tag{68}$$

Corolario 5 *Si p y q son polinomios primos entre sí, q no tiene ceros sobre* $\boldsymbol{R}$ *y* $grado(q) \geq grado(p) + 1$, *entonces*

$$\boxed{\forall s > 0, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{isx}dx = 2\pi i \sum_{q(w)=0, Im(w)>0} \boldsymbol{res}(\frac{p(z)}{q(z)}e^{isz}, w)} \tag{69}$$

Teorema 11 *Sea f meromorfa en* $\boldsymbol{C}$, *P el conjunto de polos de f,*

- *f tiene polos reales simples,* $P \cap \boldsymbol{R}$ *es finito.*
- $Int(H) \cap P$ *es finito.*
- $\exists K \geq 0, M \geq 0, p > 1$ *tal que* $\mid f(z) \mid \leq \dfrac{K}{\mid z \mid^p}, \forall z \in H, \mid z \mid \geq M$.

entonces

$$\boxed{\forall s > 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = 2\pi i \sum_{w\in Int(H)\cap P} \boldsymbol{res}(f(z)e^{isz}, w) + \pi i \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{res}(f(z)e^{isz}, a_j)} \tag{70}$$

Corolario 6 *Si p y q son polinomios primos entre sí, los ceros de q sobre* $\boldsymbol{R}$ *son simples y* $grado(q) \geq grado(p) + 1$, *entonces*

$$\boxed{\forall s > 0, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{isx}dx = 2\pi i \sum_{q(w)=0, Im(w)>0} \boldsymbol{res}(\frac{p(z)}{q(z)}e^{isz}, z) + \pi i \sum_{q(a)=0, a\in\boldsymbol{R}} \boldsymbol{res}(\frac{p(z)}{q(z)}e^{isz}, a)} \tag{71}$$

8. Métodos de resolución de EDP

8.1. Separación de variables

$$\boxed{u(x,t) = \chi(x) * T(t)} \tag{72}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Reemplazar en EDP.}} \tag{73}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Aplicar C.B. y estudiar la constante } \lambda \text{ .}} \tag{74}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Principio de Superposición, } \; v(x,t) = \sum_{k=-N}^{N} A_k \Phi_k(x,t)} \tag{75}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Equivale a } \; v(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{A}_k \Phi_k(x,t)} \tag{76}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Aplicar Condiciones Iniciales}} \tag{77}$$

8.2. Series de Fourier

Sea $f : [-\ell, \ell] \to \mathbf{R}$, podemos escribir su desarrollo en series de Fourier como

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{\ell}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{\ell})} \tag{78}$$

La forma compleja de la serie de Fourier es la siguiente

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\dfrac{ik\pi x}{\ell}}} \tag{79}$$

con $c_k = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & \text{k=0} \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & k > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & k < 0 \end{cases}$.

Los coeficientes se obtienen de la siguiente forma

$$\boxed{c_{k_0} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{\frac{-ik_0\pi x}{\ell}}dx} \tag{80}$$

y los coeficientes reales,

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\cos(\frac{n\pi\xi}{\ell})d\xi} \tag{81}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\sin(\frac{n\pi\xi}{\ell})d\xi} \tag{82}$$

8.3. Transformada de Fourier

Definicion 26 *Sea $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ integrable ($\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid dx < +\infty$), entonces la **transformada de Fourier** de f es*

$$\boxed{T(f)(s) = \widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iys}dy} \tag{83}$$

La antitransformada de una funcion f integrable es

$$\boxed{T^{-1}(f)(x) = \check{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{ixs}ds} \tag{84}$$

Teorema 12 *Sea f integrable, $\widehat{f}$ integrable y f continua , entonces*

$$\boxed{f(x) = T^{-1}(T(f))(x) = \check{\widehat{f}}(x)} \tag{85}$$

8.3.1. Propiedades

- T, T^{-1} son lineales.
- $\widehat{f'}(s) = is\widehat{f}(s)$

Corolario 7 *Sean f y g continuas e integrables, tenemos que*

$$\boxed{\widehat{f} = \widehat{g} \Longrightarrow f = g} \tag{86}$$

8.3.2. Teorema de Convolución

$$\boxed{(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy} \tag{87}$$

como consecuencia ,

$$\boxed{(\widehat{f * g})(s) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(s)\widehat{g}(s)} \tag{88}$$

8.3.3. Propiedades

$$\boxed{a \neq 0, g(x) = f(ax), f \;\text{ integrable, entonces } \widehat{g}(s) = \frac{1}{\mid a \mid}\widehat{f}(\frac{s}{a})} \tag{89}$$

$$\boxed{T(f(x-x_0))(s) = e^{isx_0}T(f)(s)} \tag{90}$$

$$\boxed{T(e^{is_0x}f(x))(s) = T(f)(s-s_0)} \tag{91}$$

$$\boxed{T(f(x)\cos(w_0x))(s) = \frac{1}{2}[\widehat{f}(s-w_0) + \widehat{f}(s+w_0)]} \tag{92}$$

$$\boxed{T(f(x)\sin(w_0x))(s) = \frac{1}{2i}[\widehat{f}(s-w_0) - \widehat{f}(s+w_0)]} \tag{93}$$

Oscar Peredo <operedo@ing.uchile.cl>