COORDENADAS CURVILINEAS

Un sistema de coordenadas curvilíneas es una transformación invertible $\vec{r}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de modo que a todo triplete $(u,v,w) \in D$ le corresponde un único punto en el espacio

$$\boxed{\vec{r}(u,v,w) = (x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))}$$

1. Tiedro de vectores y factores escalares

Definición 1.1

Supongamos que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \neq 0$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq 0$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \neq 0$ en el punto (u_0, v_0, w_0).
Definimos el tiedro de vectores unitarios, $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ asociados al sistema de coordenadas dado por $\vec{r}$, en el punto $\vec{r}(u_0, v_0, w_0)$, mediante:

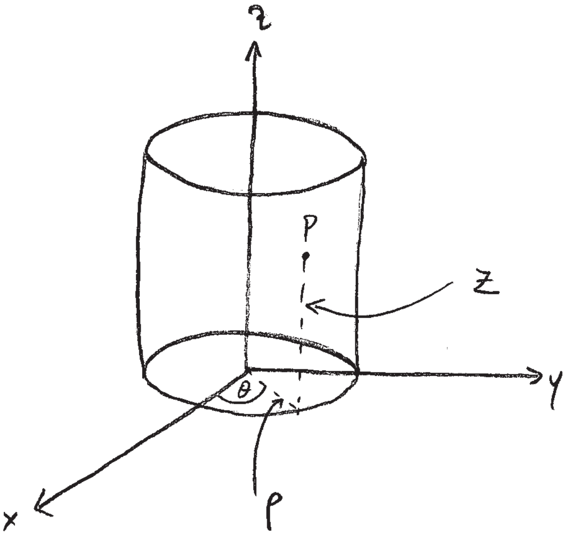
$$\hat{u} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Big/ \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\| , \quad \hat{v} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Big/ \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| , \quad \hat{w} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \Big/ \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|$$

Se llaman factores escalares a

$$h_u \equiv \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\| , \quad h_v \equiv \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| , \quad h_w \equiv \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|$$

2. Coordenadas cilíndricas

Las variables que determinan un pto $\vec{p}$ cualquiera son ρ, θ y z.



$\rho \in [0, +\infty)$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$z \in \mathbb{R}$

Entonces la relación entre cilíndricas y cartesianas es:

$$\vec{r}(\rho, \theta, z) = (x(\rho,\theta,z), y(\rho,\theta,z), z(\rho,\theta,z)) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta, z)$$

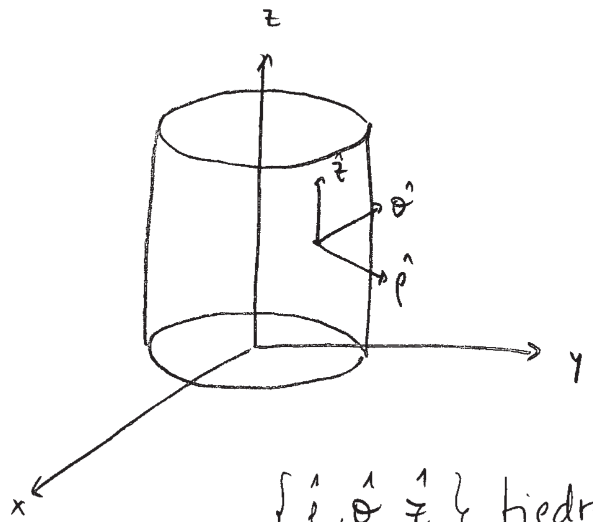
Donde $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ y $z = z$.

Los factores escalares son:

$h_\rho = \|(\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0)\| = 1$

$h_\theta = \|(-\rho\,\text{sen}\,\theta, \rho\cos\theta, 0)\| = \rho$

$h_z = \|(0, 0, 1)\| = 1$



Con esto el triedro es:

$\hat{\rho} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0)$

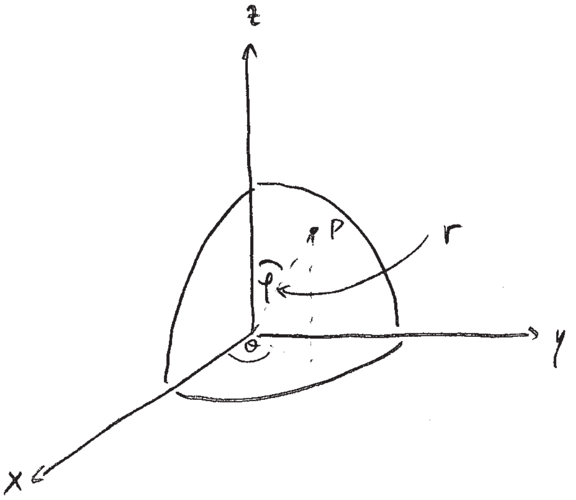
$\hat{\theta} = (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta, 0)$

$\hat{z} = (0, 0, 1)$

$\{\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z}\}$ triedro ortogonal DERECHO.

3. Coordenadas esféricas

Las variables que determinan un punto $\vec{p}$ cualquiera son r, θ y φ



$r \in [0, +\infty)$

$\varphi \in [0, \pi)$

$\theta \in [0, 2\pi)$

Entonces la relación entre esféricas y cartesianas es:

$$\vec{r}(r,\varphi,\theta) = (x(r,\varphi,\theta), y(r,\varphi,\theta), z(r,\varphi,\theta)) = (r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi)$$

Donde

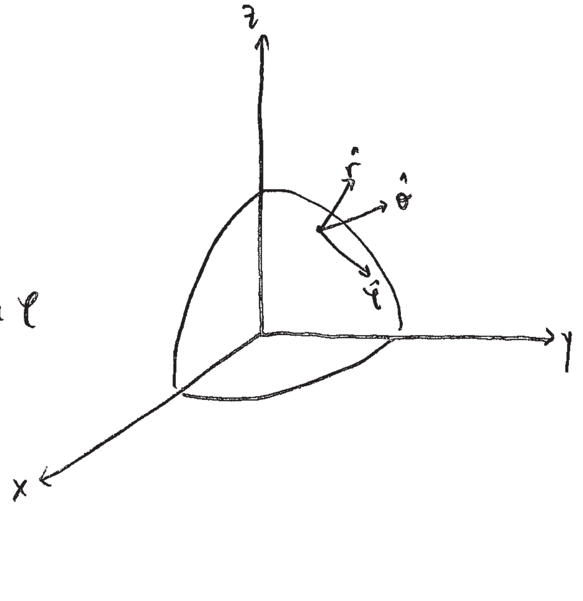
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad , \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Los factores escalares son:

$h_r = \|(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi)\| = 1$

$h_\varphi = \|(r\cos\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, -r\operatorname{sen}\varphi)\| = r$

$h_\theta = \|(-r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, 0)\| = r\operatorname{sen}\varphi$



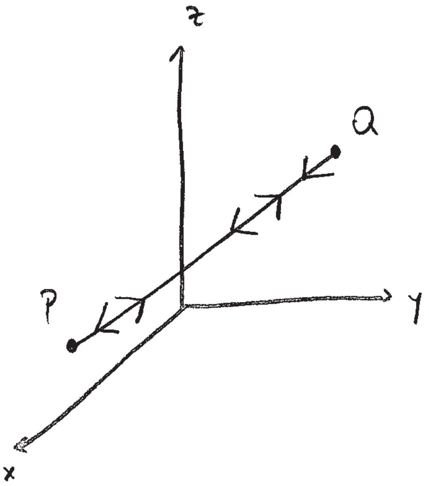
Con esto el triedro es:

$\hat{r} = (\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi)$

$\hat{\varphi} = (\cos\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, -\operatorname{sen}\varphi)$

$\hat{\theta} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$

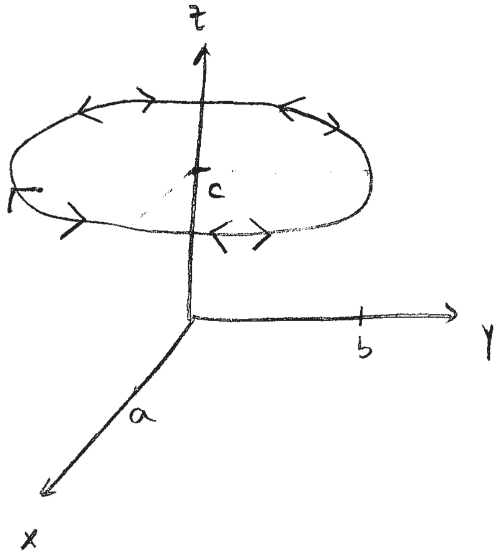
Ejemplos de como parametrizar curvas



$\vec{r}_1(t) = P(1-t) + Q \cdot t \qquad t \in [0,1]$

$\vec{r}_2(t) = Q(1-t) + P \cdot t \qquad t \in [0,1]$

(si $P, Q \in \mathbb{R}^2$, entonces $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$)
(si $P, Q \in \mathbb{R}$, entonces $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

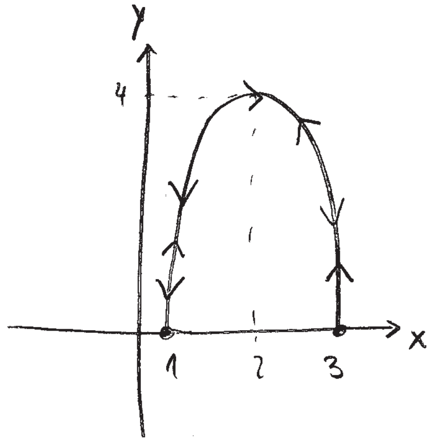


$\vec{r}_1(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta, c) \qquad \theta \in [0, 2\pi)$

$\vec{r}_2(\theta) = (a\cos\theta, -b\sin\theta, c) \qquad \theta \in [0, 2\pi)$

(si $z=0 \ \forall t$ $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$)

Esos fueron ejemplos de parametrizaciones de curvas en $\mathbb{R}^3$.
($\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$)



$y = -4x^2 + 16x - 12$

$\vec{r}_1(t) = (t, -4t^2 + 16t - 12) \qquad t \in [1,3]$

$\vec{r}_2(t) = (3-t, -4(3-t)^2 + 16(3-t) - 12) \qquad t \in [0,2]$

Este fue un ejemplo de parametrización de curva en $\mathbb{R}^2$.
($\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$)

Observación. ($\mathbb{R}$ trivial)

Una curva puede ser parametrizada desde $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.
La parametrización por lo tanto siempre es de 1 variable.

- si parametrizo una curva en $\mathbb{R}^2$

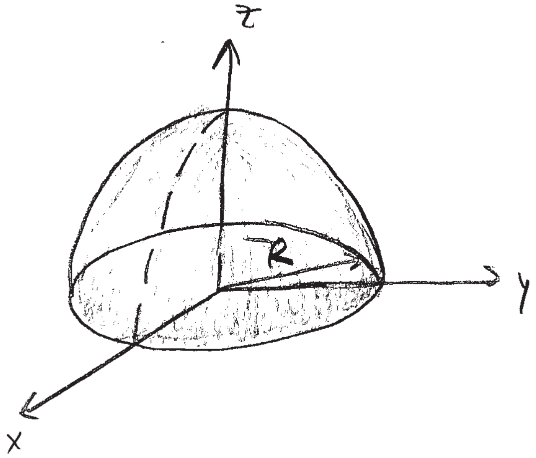
$$\vec{r}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow (t, t^2) \quad \text{(por ejemplo)}$$

- si parametrizo una curva en $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (0, t+1, t^2) \quad \text{(por ejemplo)}$$

Al llevar a cabo una parametrización, después de tener claro el dominio y el conjunto de llegada ($\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) se debe elegir un sistema de coordenadas (cartesianas o polares si r llega a $\mathbb{R}^2$, cartesianas, cilíndricas o esférica si r llega a $\mathbb{R}^3$).
Se debe elegir que variable se usará para parametrizar con r y luego escribir x e y en función de esa variable (si r llega a $\mathbb{R}^2$) o escribir x, y, z en función de la variable (si r llega a $\mathbb{R}^3$).
Definir los límites de la variable (si es el caso también verificar la orientación automática que genera r y darse cuenta si es positiva o negativa)

Ejemplos de como parametrizar superficies



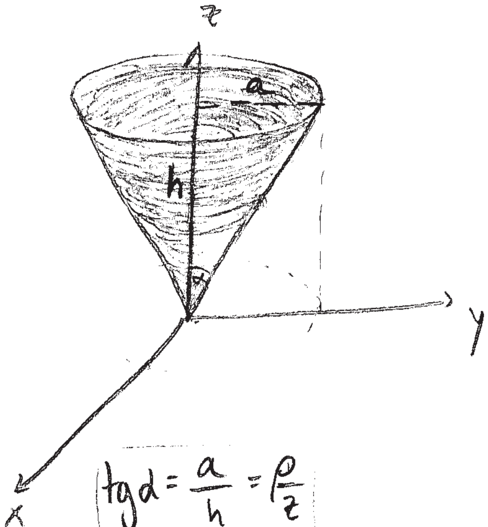
$\vec{r}_1(\varphi,\theta) = (R\,\text{sen}\varphi\cos\theta,\ R\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta,\ R\cos\varphi)$

esféricas

$\varphi \in [0, \pi/2] \wedge \theta \in [0, 2\pi]$

$\vec{r}_2(x,y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$ $\quad x,y \in [-R, R]$

cartesianas



$\vec{r}_1(x,y) = (x, y, \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2})$ $\quad x,y \in [-a, a]$

cartesianas

(tiene problemas de diferenciabilidad en (0,0,0))

$\vec{r}_2(r,\theta) = \left(\frac{ar\cos\theta}{\sqrt{h^2+a^2}}, \frac{ar\,\text{sen}\theta}{\sqrt{h^2+a^2}}, \frac{hr}{\sqrt{h^2+a^2}}\right)$ $\quad r \in [0, \sqrt{h^2+a^2}] \wedge \theta \in [0, 2\pi]$

esféricas

$\boxed{tg\,\alpha = \frac{a}{h} = \frac{\rho}{z}}$

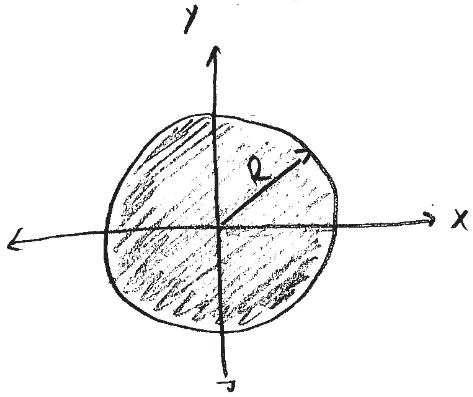
$\boxed{\text{sen}\,\varphi = \frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}}$

$\boxed{\cos\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}}$

$\vec{r}_3(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\theta, \rho h/a)$ $\quad \rho \in [0, a]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

cilíndricas

Esos fueron ejemplos de parametrizaciones de superficies en $\mathbb{R}^3$



$\vec{r}_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)$ $\quad r \in [0, R] \wedge \theta \in [0, 2\pi]$

polares

$\vec{r}_2(x,y) = (x, y) \wedge x^2+y^2 \leq R^2$

cartesianas

Ese fue un ejemplo de parametrización de superficie en $\mathbb{R}^2$

Observación

Una superficie puede ser parametrizada desde $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.
La parametrización por lo tanto siempre es de 2 variables.

- si parametrizo una superficie en $\mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(u,v): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \longrightarrow (u+v, v^2) \quad \text{(por ejemplo)}$$

- si parametrizo una superficie en $\mathbb{R}^3$

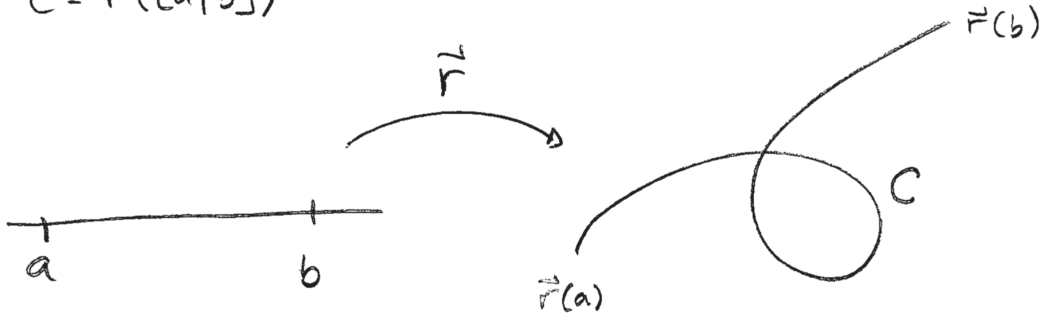
$$\vec{r}(u,v): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longrightarrow (u^3, v^3, (u+v)^2) \quad \text{(por ejemplo)}$$

Al llevar a cabo una parametrización, después de tener el dominio ($\mathbb{R}^2$ para superficie) y el conjunto de llegada ($\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ para superficies) bien claros se debe elegir un sistema de coordenadas (cartesianas o polares si r llega a $\mathbb{R}^2$, cartesianas, cilíndricas o esféricas si r llega a $\mathbb{R}^3$).
Se debe elegir las dos variables que se usarán para parametrizar con r y luego escribir x e y en función de esas variables (si r llega a $\mathbb{R}^2$) o escribir x, y, z en función de esas variables (si r llega a $\mathbb{R}^3$).
Definir los límites de ambas variables (si es el caso también verificar la orientación automática que genera r y darse cuenta si es positiva o negativa)

Curvas en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

- CURVAS SIMPLES Y REGULARES (y SUAVES)

Un conjunto C de $\mathbb{R}^n$, es una curva $\boxed{\text{regular}}$ y $\boxed{\text{simple}}$ si existe una función $\vec{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\boxed{\text{inyectiva}}$ y $\boxed{\text{regular}}$ tal que $C = \vec{r}([a,b])$



A $\vec{r}$ se le llama parametrización de C, y los puntos $\vec{r}(a)$ y $\vec{r}(b)$ se llaman extremos de C.

Se dice que la parametrización es $\boxed{\text{regular}}$ si es de clase C^1 y la <u>derivada</u> es <u>distinta de cero</u> en todos los puntos

*La condición de que $\vec{r}$ sea de clase C^1 en el intervalo $[a,b]$ se entiende como que $\vec{r}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y en los extremos a y b existen derivadas laterales, de modo que $\vec{r}$ derivada extendida así hasta los extremos del intervalo sea continua.

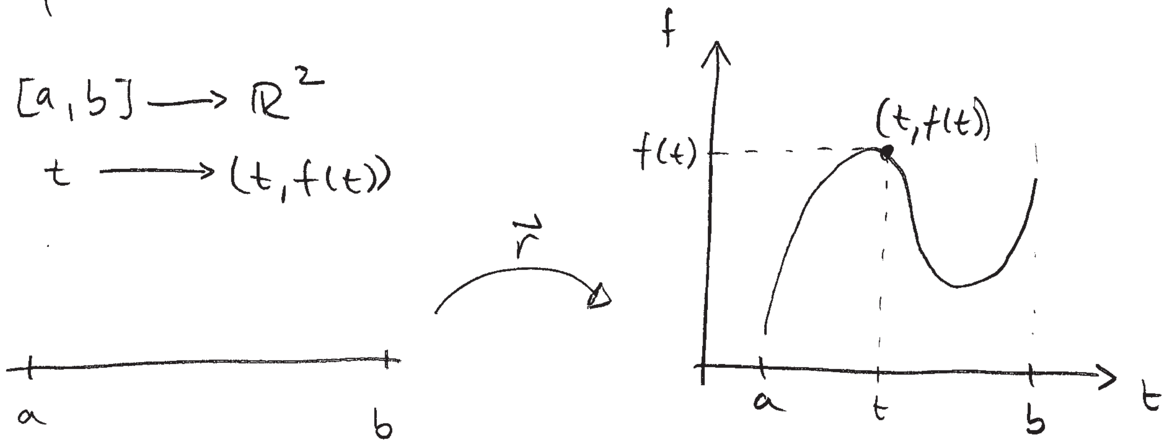
Geométricamente, estas condiciones sobre $\vec{r}$ implican que en cada punto de C existe una única recta tangente, incluso en los extremos de C, y además la curva es suave: la dirección (y sentido) de la recta tangente varía de forma continua.

Además al ser $\vec{r}$ inyectiva, la curva no se corta a sí misma.

1. Todos las parametrizaciones que hemos visto han sido una forma de definir una curva en forma PARAMETRICA.

2. La gráfica de una función de clase C^1, $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una curva en $\mathbb{R}^2$ que se puede parametrizar mediante la función:

$$\vec{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow (t, f(t))$$



Y si $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, su gráfico define una curva en $\mathbb{R}^3$ que se parametriza mediante

$$\vec{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (t, f_1(t), f_2(t))$$ donde f_1 y f_2 son las componentes de f

Esta forma define a una curva EXPLÍCITAMENTE.

3. Hay una tercera forma de definir una curva, ésta se puede definir IMPLÍCITAMENTE

Supongamos que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x,y) = x + 2y - 1$, el conjunto de nivel cero define una curva C que puede ser parametrizada así:

$$x + 2y - 1 = 0 \implies y = \frac{1-x}{2} \implies \begin{array}{l} \vec{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longrightarrow \left(t, \frac{1-t}{2}\right) \end{array}$$

Si por el contrario $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tq $f(x,y,z) = (x + 2y - z, x^3)$

entonces

$$\left.\begin{array}{c} x + 2y - z = 0 \\ \wedge \\ x^3 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} 2y - z = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} y = \frac{z}{2} \\ x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longrightarrow (0, t/2, t) \end{array}$$

La utilización de parametrizaciones para parametrizar curvas nos permite usar técnicas de cálculo para deducir propiedades de las curvas.

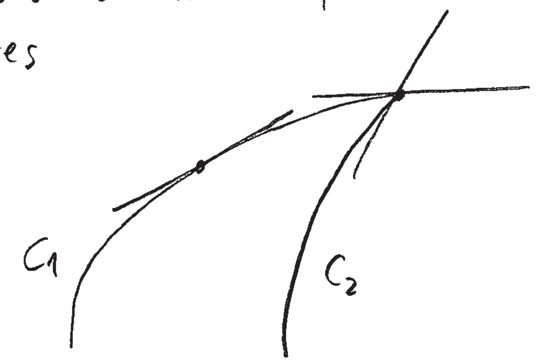
Pero una misma curva admite distintas parametrizaciones, por lo que hay que tener cuidado de distinguir si una propiedad es de la curva o de la parametrización.

Hay un concepto sin embargo en relación con las curvas que sí depende de la parametrización que se utilice, que es la orientación, o el sentido de recorrido de C.

Cuando se escoge una parametrización de una curva, automáticamente se está definiendo un sentido de recorrido de C, empezando en $\vec{r}(a)$ y acabando en $\vec{r}(b)$.

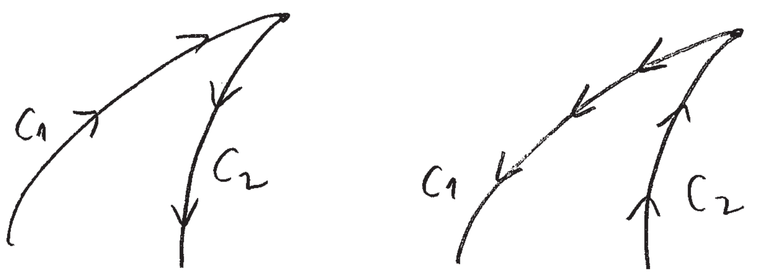
• CURVAS REGULARES A TROZOS. CURVAS CERRADAS

En primer lugar es posible que una curva tenga algunos picos. Una curva de este tipo tendría una parametrización $\vec{r}:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva y "regular por trozos", es decir, de modo que existe una familia finita de puntos $a=t_1\leq \dots \leq t_k=b$ de modo que $\vec{r}$ es regular en cada intervalo $[t_i,t_{i+1}]$. Los picos de la curva estarían en los puntos $\vec{r}(t_i)$, y en ellos habrían 2 rectas tangentes



En la práctica, es difícil encontrar esta parametrización, y será suficiente considerar a C como la unión finita de curvas consecutivas $C_1, \dots, C_K$ (donde cada una, solo tenga un pto en común, es decir, el extremo final de una sea el extremo inicial de la otra).

La orientación es como antes, se define una parametrización para una curva C_i y automáticamente queda orientada y las demás quedan orientadas de modo consecutivo para recorrer todo C



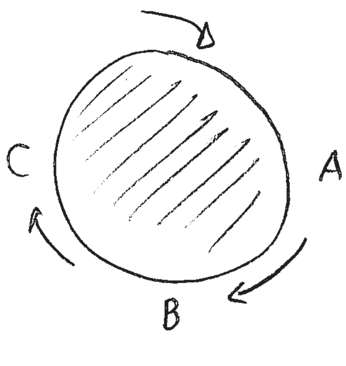
Una curva cerrada puede parametrizarse (y orientarse) a trozos considerando una parametrización por cada "trozo".

La única particularidad que tienen las curvas cerradas es la dificultad para orientarla.

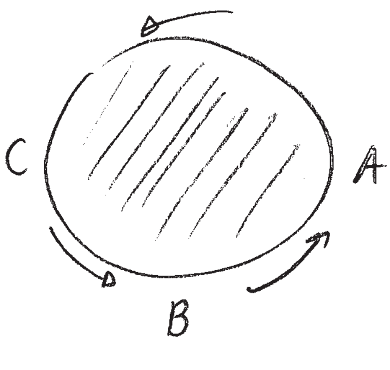
Una parametrización automáticamente define una orientación, pero como $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, para distinguirlo hacen falta al menos 3 puntos (a, b y otro más): indicando el orden de los puntos queda unívocamente definida la orientación.

Cuando se trata de curvas planas, hay además otros criterios clásicos: Se puede decidir si la curva debe recorrerse en sentido horario o anti-horario. Por convenio se considera que el sentido anti-horario es el sentido positivo y el horario el sentido negativo.

También se puede decidir indicando si la región acotada por la curva debe quedar a la izquierda según recorre la curva (sentido positivo) o a la derecha (sentido negativo)



NEGATIVO



POSITIVO

Definicion (Longitud de curva)

Sea C una curva regular y simple en $\mathbb{R}^n$. Sea $\vec{r}:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de C. Se define longitud de curva C como

$$L(C) = \int_a^b \| \vec{r}'(t) \| \, dt$$

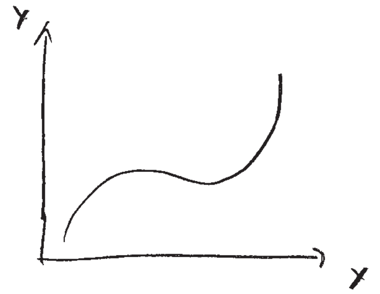
- Si C es regular por trozos $L(C) = \sum_i L(C_i)$
- Si C es cerrada simple, se puede dividir en 3 puntos y considerarla curva regular por trozos.

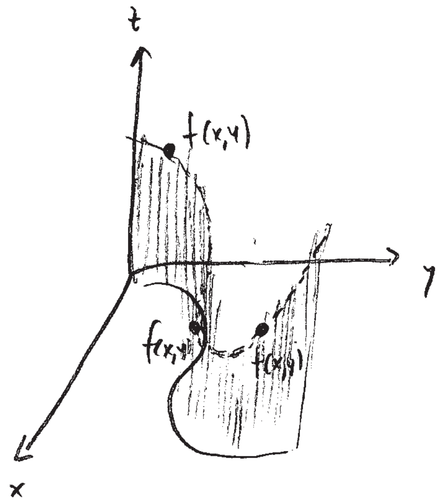
Integral de línea de un campo escalar

Se llama campo escalar en $\mathbb{R}^n$ a una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, como por ejemplo la temperatura en cada punto del espacio $\mathbb{R}^3$.

Para entender el significado de la definición de integral de línea de un campo escalar, consideremos lo siguiente:

Supongamos que tenemos una curva C en $\mathbb{R}^2$, parametrizada por $\vec{r}:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, y una función escalar $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Podemos representar gráficamente a la función f sobre la curva C como un muro que levanta a una altura $f(x,y)$ sobre cada punto $(x,y) \in C$. Se trata ahora de calcular el área del muro entre C y la gráfica de f.





Definicion (Integral de un campo escalar a lo largo de una curva)

Sea C una curva regular y simple en $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$), y sea $\vec{r}:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización de C. Sea f un campo escalar continuo en un abierto que contenga a C. Se define la integral de f a lo largo de C como

$$\int_C f = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| \, dt$$

- Si C es regular por trozos $\int_C f = \sum_i \int_{C_i} f$
- Si C es cerrada, se puede dividir en 3 puntos y considerarla como curva regular por trozos.

Ejemplo

Sea $C = \vec{r}([a,b])$ donde $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

Calcular $\displaystyle\int_C x^2+y^2+z^2$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \|(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

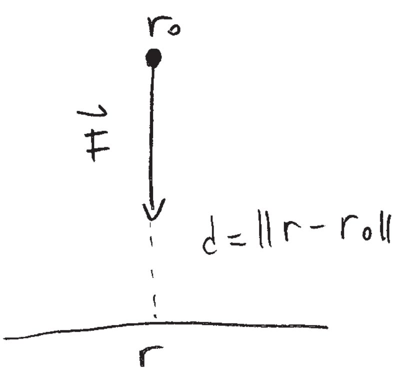
$$\int_C f = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1 + t^2)\, dt = \sqrt{2}\left[2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right]$$

- <u>Integral de línea</u> de un <u>campo vectorial</u>

Se llama campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ a una función $\vec{F}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, como por ejemplo el campo gravitatorio generado por una masa M, es decir: $\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$.

Para entender el significado de la definición de integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva, consideremos el ejemplo del cálculo del trabajo generado por un campo de fuerzas sobre un móvil que se desplaza dentro de él.

El caso más sencillo es el trabajo generado por la caída de un cuerpo por el efecto de la gravedad



En principio el trabajo generado se calcula como

$$W = F\, d$$

Este concepto se concreta un poco más, añadiendo un signo que interprete si el trabajo se genera (cuando la $\vec{F}$ tiene el mismo sentido que el desplazamiento)

- o si se consume (cuando $\vec{F}$ y $\vec{d}$ son antiparalelos)

Es decir $W = \pm\|F\| \cdot \|r - r_0\|$

Aquí es donde se visualiza que la integral de línea del campo vectorial tendrá un valor x para una orientación y $-x$ para la orientación contraria de la curva.

Definición (Integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva)

Nota: le llamaremos integral de trabajo.

Sea C^+ una curva regular y simple orientada en $\mathbb{R}^n$, U un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $C \subseteq U$, y $\vec{F}: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Sea $\vec{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización cualquiera de C^+. Se define la integral de $\vec{F}$ a lo largo de C^+ como:

$$\int_{C^+} \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

- o si C^+ es regular por trozos $\int_{C^+} \vec{F} = \sum_i \int_{C_i^+} \vec{F}$

- o si C^+ es curva regular simple y cerrada, se considera como curva regular por trozos.

Si llamamos C^- a la curva orientada de forma opuesta, se tiene que

$$\int_{C^+} \vec{F} = -\int_{C^-} \vec{F}$$

Notaciones:

$$\int_{C^+} \vec{F} = \int_{C^+} f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n \quad \text{con } f_1, \ldots f_n \text{ componentes de } \vec{F}.$$

Ejemplo:

Sea $\vec{F}(x,y) = (xy, y^2)$ y $r(t) = (t^2, t^3)$ $t \in [0,1]$

Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}$

$$\int_C \vec{F} = \int_0^1 (t^2 t^3, t^{3\cdot 2}) \circ (2t, 3t^2)\,dt$$

$$= \int_0^1 (2t^6 + 3t^8)\,dt = \left(\frac{2t^7}{7} + \frac{3t^9}{9}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{3} = \frac{13}{21}$$

Ejemplo de notación

$$\int_C (2xy\,dx + x^2 dy) = \int_C \underbrace{(2xy, x^2)}_{\vec{F}(x,y)} \circ \underbrace{(dx, dy)}_{d\vec{r}}$$

- Teorema de Greem

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada tal que su frontera ∂S^+ es una curva simple, cerrada y regular por pedazos, orientada en el sentido anti-horario (positivo)

Consideremos dos campos escalares $f_1 = f_1(x,y)$ y $f_2 = f_2(x,y)$, ambos de clase C^1 en un abierto que contiene a S y ∂S. Entonces:

$$\oint_{\partial S^+} f_1\,dx + f_2\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Este teorema es un caso particular del teorema de Stokes (que viene más adelante)

Una aplicación del teorema de green es calcular el área A de una superficie S.

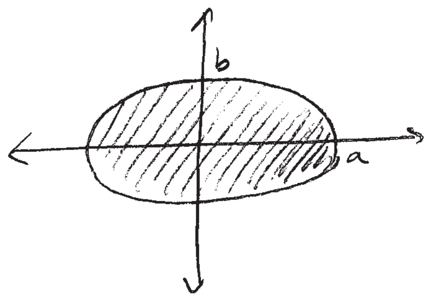
Sea $f_1 = -y \wedge f_2 = x$ se deduce que

$$\oint_{\partial S} -y\,dx + x\,dy = \iint 2\,dx\,dy = 2 \underbrace{\iint dx\,dy}_{A(S)}$$

$$\Longrightarrow \quad A(S) = \frac{1}{2} \oint_{\partial S^+} x\,dy - y\,dx$$

Ejemplo.

Consideremos $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} \leq 1$



Podemos parametrizar la elipse:

$\vec{x}(t) = a\cos t$ y $\vec{y}(t) = b\,\mathrm{sen}\,t$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$$A(\text{elipse}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\,dy - y\,dx)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2 t - (-ab\,\mathrm{sen}^2 t))\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot ab \cdot \cancel{2}\pi = \pi ab.$$

- Teorema fundamental del cálculo vectorial.

Sea U un abierto en $\mathbb{R}^n$, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en U, y p, q dos puntos de U tales que existe una curva simple y regular por trozos contenida en U de p a q, C^+ se tiene

$$\int_{C^+} \nabla f = f(q) - f(p)$$

Es decir, la integral de un gradiente continuo a lo largo de cualquier curva contenida en U depende sólo de los extremos de la curva, y no de la curva en sí. Esta propiedad da nombre a un tipo especial de campos vectoriales:

Definicion (Campos conservativos)

Sea U un abierto, si para todos p y q en U, la integral a lo largo de cualquier curva simple regular a trozos contenida en U que une p y q es la misma (depende sólo de los puntos p y q, y no de la curva), entonces el campo es conservativo.

Esta definición es equivalente a que la integral a lo largo de cualquier curva cerrada y regular por trozos en U sea cero.

Según el teorema, los gradientes continuos son campos vectoriales conservativos en cualquier abierto de su dominio. El que un campo sea conservativo o no, depende del campo y del conjunto donde está definido. Si U es un abierto conexo, de hecho todos los campos conservativos son gradientes de una función de clase C^1.

Teorema (Campos conservativos)

Sea U un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$, y $\vec{F}: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial conservativo en U. Sea $a \in U$ fijo, y definimos para cada $x \in U$ la función $f(x) = \int_{C_x^+} \vec{F}$, donde C_x^+ es una curva simple y regular por trozos contenida en U desde a hasta x. Entonces existe ∇f y además $\nabla f(x) = \vec{F}(x) \quad \forall x \in U$.

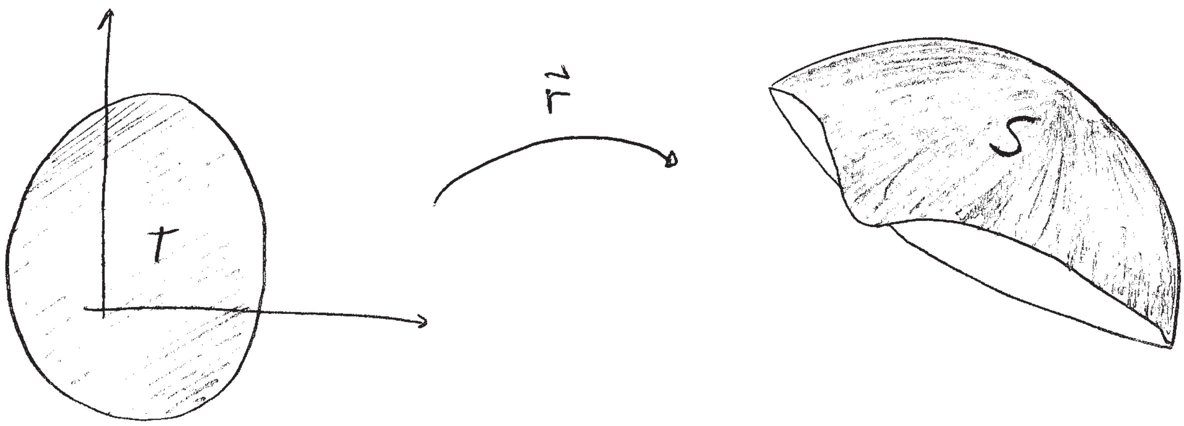
Definicion (Función potencial)

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo en un abierto $U \in \mathbb{R}^n$. Se llama función potencial de $\vec{F}$ a cualquier función f de clase C^1 en U que verifique $\vec{F} = \nabla f$, si es que existe.

Superficies en $\mathbb{R}^3$

- SUPERFICIES REGULARES Y SIMPLES

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se llama superficie regular y simple si existe una región elemental del plano $T \subseteq \mathbb{R}^2$ y una función $\vec{r}: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva y de clase $C^1(T)$ (regular) tal que $S = \vec{r}(T)$



La función $\vec{r}$ se llama parametrización de S, y se llama borde de S (∂S) a la imagen por $\vec{r}$ de la frontera de T, $\partial S = \vec{r}(\partial T)$

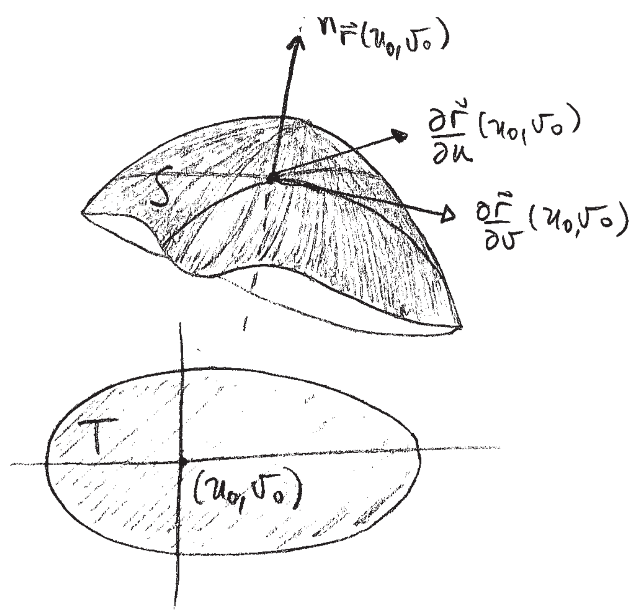
La función $\vec{r}$ regular en T quiere decir que es de clase C^1 y tiene diferencial rango 2 en un abierto U que contenga a T

La condición de que $\vec{r}$ sea regular implica que la matriz

$$d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \; \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} & \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u} & \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial u} & \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial v} \end{bmatrix}$$

tiene rango 2, y por tanto que los dos vectores columnas $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ sean LI, o lo que lo mismo, su producto vectorial no es nulo

$$n_{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \neq \vec{0}$$



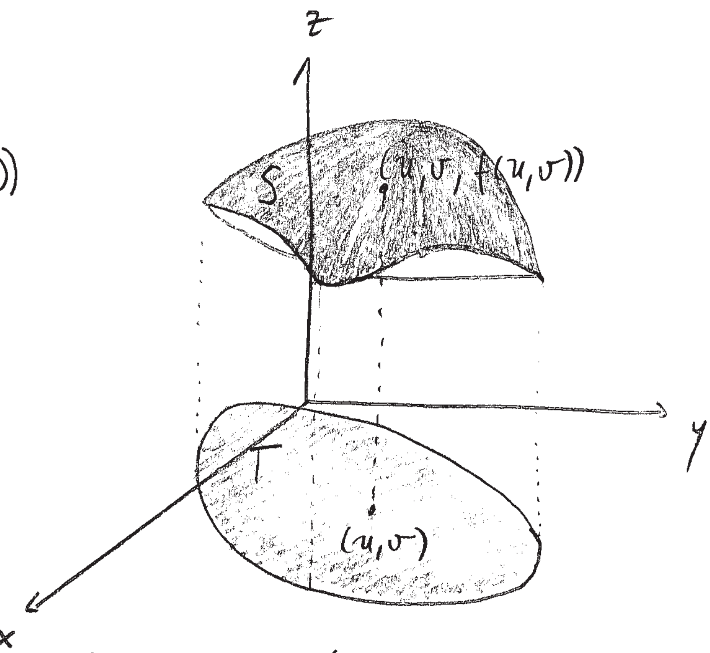
Geométricamente, esto indica que la superficie no tiene picos o aristas, y en cada punto de S existe un único plano tangente. La condición de que r sea inyectiva implica que la superficie no tiene puntos múltiples, no se corta a sí misma

La frontera de T es una curva simple y regular por trozos en el plano, la frontera de S es una superficie simple y regular en el espacio.

1. Todas las parametrizaciones que hemos visto han sido una forma de definir una superficie en forma PARAMÉTRICA

2. La gráfica de una función de clase $C^1(T)$ $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, con T una región elemental del plano, es una superficie en $\mathbb{R}^3$ que se puede parametrizar mediante la función:

$$\vec{r} : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longrightarrow (u, v, f(u,v))$$



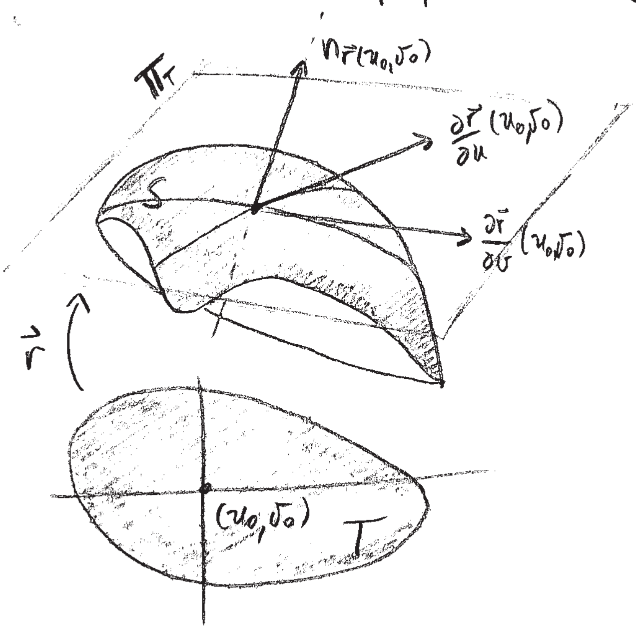
Esta forma define a una superficie EXPLÍCITAMENTE

3. Existe una tercera forma de definir una superficie, ésta se puede definir IMPLÍCITAMENTE.

Supongamos que $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x,y,z) = x^2+y^2+z$, el conjunto de nivel cero define una superficie S que puede ser parametrizado así:

$$x^2+y^2+z=0 \rightarrow z=-x^2-y^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \longrightarrow (u,v,-u^2-v^2) \end{array} \right.$$

- Recta normal y plano tangente.



- Se llama normal a la superficie en el punto $x_0 = \vec{r}(u_0,v_0)$ al vector que tiene la dirección $n_{\vec{r}}(u_0,v_0)$, donde $\vec{r}: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización cualquiera de S.

- Se llama plano tangente a S en $x_0 = \vec{r}(u_0,v_0)$ al plano que pasa por x_0 y es $\perp$ al vector normal. Este plano está generado por los vectores $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$

- Superficies orientadas.

Dependiendo de la parametrización de la superficie es el vector normal que se definirá, a veces $n_{\vec{r}}(u_0,v_0)$ puede tener el sentido tal que sale de la superficie o entra a la superficie, esta distinción es muy relevante para la interpretación de algunos cálculos. Esto da lugar a la definición de superficie orientada.

Hay una relación entre la orientación de una superficie y la orientación de su borde (que es una curva cerrada simple y regular por trozos en $\mathbb{R}^3$).

Si $\vec{r}: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S, el borde de S ∂S, es la imagen por $\vec{r}$ de la frontera de T, $\vec{r}(\partial T)$. Escogemos entonces una parametrización "α" de la frontera de T q' la recorra en sentido positivo (dejando la región T a la izquierda), $\alpha: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

La función:

$$\vec{r} \circ \alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Updownarrow$$

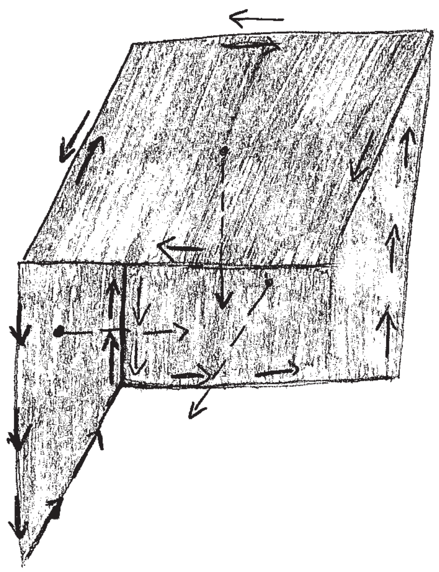
$$\vec{r}(\alpha): [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

es una parametrización de S. Con este procedimiento asociamos una orientación de S y una orientación de ∂S. Es decir <u>se puede decidir la orientación de S escogiendo la de ∂S.</u>

- SUPERFICIES REGULARES A TROZOS

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie simple regular por trozos si existe una región elemental a trozos en el plano $T = T_1 \cup \ldots \cup T_k$ (que se puede descomponer como unión finita de regiones T_i, elementales, T conexo, $T_i \cap T_j = \emptyset$ si $i \neq j$), y una función $\vec{r}: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de clase $C^1(T)$, inyectiva en el interior de T, y regular en cada T_i, tal que $\vec{r}(T_i) \cap \vec{r}(T_j) = \emptyset$ si $i \neq j$, y de modo que $S = \vec{r}(T)$.

Para definir la orientación de una superficie regular por trozos habrá que tener cuidado: para orientar una superficie regular por trozos, hay que definir una orientación en cada trozo regular, de forma q' dos caras que tienen una arista común en su borde definan orientaciones opuestas en ella.



Integral de superficie de un campo vectorial

Si tenemos un fluido, como un líquido o un gas, en movimiento con velocidad $\vec{v}(x,y,z)$ en cada punto (x,y,z), e interponemos una superficie S, se llama flujo a través de S a la cantidad de fluido que la atraviesa por unidad de tiempo.

Para calcular el flujo, consideremos primero el ejemplo más sencillo, en el que la velocidad del fluido es constante igual a $\vec{v}$ (misma dirección, módulo y sentido), e interponemos una superficie plana y perpendicular a $\vec{v}$: el flujo por unidad de tiempo será igual al volumen encerrado entre S y la superficie donde se encuentran las partículas del fluido un segundo después (S_1), que será paralela a S a distancia $\|\vec{v}\|$: es decir, el flujo es igual al producto de la norma de $\vec{v}$ por el área de S.

Definición (Integral de superficie de campos vectoriales).

Sea S^+ una superficie regular y simple orientada en $\mathbb{R}^3$, y $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un abierto que contenga a S. Se define la integral de $\vec{F}$ a través de S como:

$$\iint_{S^+} \vec{F} = \iint_T \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \circ n_r(u,v)\, du\, dv$$

siendo $\vec{r}: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización cualquiera de S^+.

Si S^+ es una superficie regular a trozos orientada, se define la integral como la suma de las integrales de cada trozo regular, con la orientación definida por S^+ en cada uno

◦ Teorema de Stokes

Un campo vectorial $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 como el que expresa la velocidad de las partículas de un fluido en el espacio tiene asociado otro campo llamado "rotacional de $\vec{F}$", que mide de alguna forma el efecto de rotación que el campo produce en el movimiento. Este campo se define como:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \longrightarrow \text{rot}\,\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial w \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

donde $\nabla = \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\hat{w}$

El teorema de Stokes establece una relación entre la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial y la integral del campo sobre el borde de la superficie:

T. Stokes:

Int. de superficie de rot$\vec{F}$ Ω Int. de curva de $\vec{F}$

Int de flujo de rot $\vec{F}$ Ω Int de trabajo de $\vec{F}$

$\rightarrow$ sinónimos

Teorema de Stokes:

Sea S^+ una superficie regular y simple orientada, y sea $\vec{r}: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S^+, que sea de clase C^2. Sea $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $C^1(U)$ con $S \subseteq U$. Entonces

$$\oint_{\partial S^+} \vec{F} = \iint_{S^+} \text{rot}(\vec{F})$$

donde ∂S^+ tiene orientación que resulta de aplicar $\vec{r}$ a la frontera de T, y ∂T^+ se orienta en sentido anti-horario (dejando la región T a la izquierda).

Si S^+ es una superficie regular por trozos orientables que admitan parametrización de clase C^2 en cada trozo regular, así tenemos:

$$\int_{\partial S^+} \vec{F} = \sum_i \int_{\partial S_i^+} \vec{F} = \sum_i \iint_{S_i^+} \text{rot}\,\vec{F} = \iint_{S^+} \text{rot}\,\vec{F}$$

∘ Teorema de Gauss

Asociado a un campo vectorial de clase C^1 hay también un campo escalar, que en el caso de la dinámica de fluidos mide la expansión o contracción del fluido, llamado "divergencia de $\vec{F}$", y que se define como:

$$\text{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \circ \vec{F} \longrightarrow \text{div}\,\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)\right)$$

El teorema de Gauss establece una relación entre la integral de superficie (cerrada) de un campo vectorial, y la integral de Riemann en el cuerpo encerrado por la superficie de la div $\vec{F}$. Desde el punto de vista matemático, el teorema de Gauss es una generalización a tres dimensiones del teorema de Green.

Teorema de Gauss (o de la divergencia)

Sea V una región elemental de $\mathbb{R}^3$, y sea $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto que contenga a V. Entonces

$$\iint_{\partial V^+} \vec{F} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$