Fecha: / /

Pauta Aux 4

(*) Revisar Teo. Green y caracterización de campos conservativos para esta aux. en el apunte

P1

a) Buscamos f, potencial escalar de F, ie:

$$F = \nabla f \iff \begin{cases} y^2\cos(x) + z^3 = \dfrac{\partial f}{\partial x} & (1) \\ 2y\,\text{sen}(x) - 4 = \dfrac{\partial f}{\partial y} & (2) \\ 3xz^2 + 2z = \dfrac{\partial f}{\partial z} & (3) \end{cases}$$

Integrando (1) c/r a x:

$$y^2\,\text{sen}(x) + z^3 x + C(y,z) = f(x,y,z)$$

Reemplazando en (2) e integrando:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,\text{sen}(x) - 4 \overset{(1)}{\iff} \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\,\text{sen}(x) + z^3x + C(y,z)\right) = 2y\,\text{sen}(x) - 4$$

$$\iff 2y\,\text{sen}(x) + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 2y\,\text{sen}(x) - 4$$

$$\iff C(y,z) = -4y + D(z)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = y^2\,\text{sen}(x) + z^3x - 4y + D(z)$$

Reemplazando en (3):

$$3xz^2 + 2z = \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2\,\text{sen}(x) + z^3x - 4y + D(z)\right)$$

Fecha: / /

$$\Rightarrow 3xz^2 + 2z = \cancel{3}z^2x + \frac{\partial}{\partial z} D(z) \quad / \int dz$$

$$\Rightarrow \quad z^2 + \tilde{C} = D(z)$$

Como $\tilde{C}$ es constante, podemos elegirlo arbitrario, de manera que f será potencial.

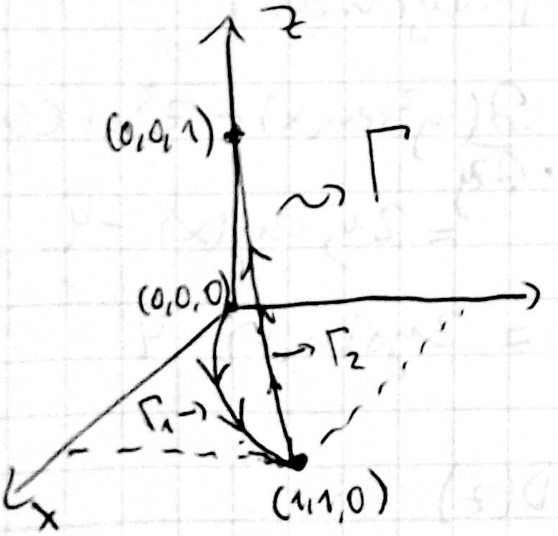
En particular, si $\tilde{C} = 0$, tenemos que:

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen}(x) + z^3 x - 4y + z^2$$

es un potencial para F.

$\therefore$ F es conservativo. //

b) Notemos que la curva no es cerrada:



Así que no podemos usar Stokes.

Notemos que:

y $G = F + (z^3, 0, 0)$

$$\Rightarrow \int_\Gamma G \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma F \cdot d\vec{r} + \int_\Gamma \begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}$$

Fecha: / /

Por la parte anterior, F es conservativo, por lo que su integral de línea dependerá sólo de sus puntos de "partida" y "llegada".

$$\int_\Gamma F\cdot d\vec{r} = f(0,0,1) - f(0,0,0)$$
$$= 1 - 0 = 1$$

Para la otra integral: Notemos que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot d\vec{r}$$

$\underline{\Gamma_1}$: Se puede parametrizar como

$$\vec{r}_1(t) = (t, t^2, 0) \quad , t\in[0,1]$$
$$\Rightarrow \vec{r}_1\,'(t) = (1, 2t, 0)$$
$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} \begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

$\underline{\Gamma_2}$: Se puede parametrizar como

$$\vec{r}_2(t) = (1-t, 1-t, t), \quad t\in[0,1]$$
$$\Rightarrow \vec{r}_2\,'(t) = (-1, -1, 1)$$
$$\Rightarrow \int_{\Gamma_2} \begin{pmatrix} z^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^1 -t^3\, dt = -\frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

Fecha: / /

Finalmente: $\int_\Gamma G\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma F\cdot d\vec{r} + \int_\Gamma \begin{pmatrix} ? \\ 0 \end{pmatrix}\cdot d\vec{r}$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

P2

a) Sean $F = \left(-f\frac{\partial g}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial x}\right) = (F_1, F_2)$

Luego, por teo. Green:

$$\int_\gamma \left(-f\frac{\partial g}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial x}\right)\cdot(dx, dy)$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-f\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right)dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + f\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)dx\,dy$$

$$= \iint_D \nabla f\cdot\nabla g\,dx\,dy + \iint_D f\,\nabla^2 g\,dx\,dy$$

RHEIN

Fecha: / /

b) 1) Veamos que F es conservativa:

$$\begin{pmatrix} x^2 + 3\,\text{sen}(y) \\ e^y + 3x\cos(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = e^y + 3x\,\text{sen}(y) + C(x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 3\cancel{\text{sen}(y)} = 3\cancel{\text{sen}(y)} + \frac{\partial}{\partial x}(C(x)) \quad \Big/ \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3} + C = C(x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

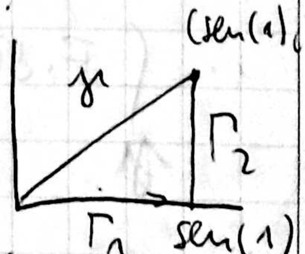
$$\therefore f(x,y) = e^y + 3x\,\text{sen}(y) + \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

es potencial de F.

$\therefore$ F es conservativa.

$$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot d\vec{r} = f(g(1)) - f(g(0)) = e^2 + 3\,\text{sen}(1)\,\text{sen}(2) + \frac{\text{sen}^3(1)}{3}$$

2) Usamos una curva que una a los puntos:



$g(0) = (0,0)$, $g(1) = (\text{sen}(1), 2)$

(Al final de la parte se explica la sig. param.):

$\vec{\Gamma}_1(t) = (0,0)(1-t) + (\text{sen}(1),0)\,t$, $t \in [0,1]$.

~~Recta que une g(0) con g(1)~~.

$\vec{\Gamma}_1'(t) = (\text{sen}(1), 0)$

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F(\text{sen}(1)t, 0) \cdot (\text{sen}(1), 0)\, dt$$

$$= \int_0^1 (\text{sen}^2(1)t^2, 1 + 3\,\text{sen}(1)t) \cdot (\text{sen}(1), 0)\, dt$$

$$= \text{sen}^3(1) \int_0^1 t^2\, dt = \frac{\text{sen}^3(1)}{3}$$

Fecha: / /

$$\vec{r_2}(t) = (\text{sen}(1),0)(1-t) + (\text{sen}(1),2)t \quad , t \in [0,1]$$
$$= (\text{sen}(1), 2t).$$

$$\vec{r_2}'(t) = (0,2).$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_2} F \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F(\text{sen}(1), 2t) \cdot (0,2)\, dt$$

$$= \int_0^1 (\text{sen}^2(1) + 3\,\text{sen}(2t),\ e^{2t} + 3\,\text{sen}(1)\cos(2t)) \cdot (0,2)\, dt$$

$$= \int_0^1 (2e^{2t} + 6\,\text{sen}(1)\cos(2t))\, dt$$

$$= e^{2t}\Big|_0^1 + 6\,\text{sen}(1)\frac{\text{sen}(2t)}{2}\Big|_0^1$$

$$= e^2 - 1 + 3\,\text{sen}(1)\,\text{sen}(2)$$

$$\therefore \int_{\Gamma} F \cdot d\vec{r} = e^2 - 1 + 3\,\text{sen}(1)\,\text{sen}(2) + \frac{\text{sen}^3(1)}{3}.$$

P3

a) Primero, calculemos $\nabla\times(f\nabla g)$:

$$\cdot\ \nabla\times(f\nabla g)=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ f\cdot\partial_x g & f\cdot\partial_y g & f\cdot\partial_z g\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right)\hat{x}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(f\cdot\frac{\partial}{\partial z}g\right)\right)\hat{y}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(f\cdot\frac{\partial}{\partial x}g\right)\right)\hat{z}$$

Vamos a calcular por coordenadas:

<u>En $\hat{x}$:</u> $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f\cdot\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(f\cdot\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial z}+\cancel{f\cdot\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}}$

$-\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial y}-\cancel{f\cdot\dfrac{\partial^2 g}{\partial z\partial y}}$ (Usando teo. Schwarz, pues $g\in\mathcal{C}^2$)

$$=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Notando que pasará lo mismo (i.e., que las segundas derivadas de g) se anularán en $\hat{y}$ y $\hat{z}$, tenemos que:

<u>En $\hat{y}$:</u> $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(f\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f\cdot\dfrac{\partial}{\partial z}g\right)=\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial z}$

Fecha: / /

En $\hat{z}$: $\frac{\partial}{\partial x}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}$

Así, $\nabla\times(f\nabla g)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\end{pmatrix}$ (*)

Calculemos ahora $\nabla f\times\nabla g$:

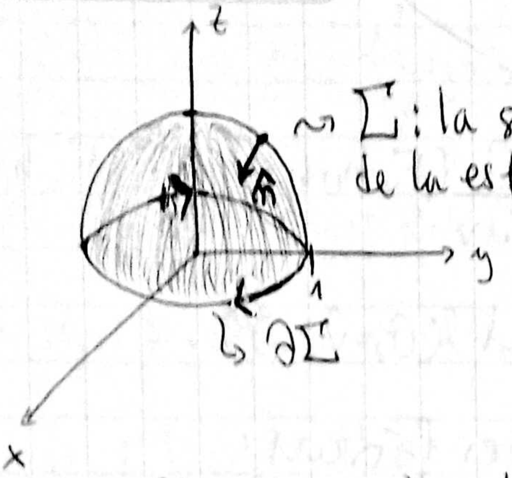
$$\nabla f\times\nabla g=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f\\ \partial_x g & \partial_y g & \partial_z g\end{vmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{=}\nabla\times(f\nabla g)\ //$$

Fecha: / /

b)



$\rightsquigarrow \Sigma$: la superficie de la mitad superior de la esfera de radio 1 (sin incluir la "tapa").

Luego: $\displaystyle\iint_{\Sigma} (\nabla f \times \nabla g) \cdot \hat{n}\, dS \overset{(a)}{=} \iint_{\Sigma} \nabla \times (f \nabla g)\, \hat{n}\, dS$

$\overset{\text{Stokes}}{=} \displaystyle\oint_{\partial\Sigma} f \nabla g\, d\vec{r} \quad (*)$

Notemos que $f = x^2 + y^2 = 1$ en $\partial\Sigma$ (pues $\partial\Sigma$ es la circunferencia de radio 1).

Además, definiendo $G = \nabla g$, es claro (por definición) que G es conservativo, y así: $\displaystyle\oint_{\Gamma} G \cdot d\vec{r} = 0$, para toda curva Γ cerrada y regular por pedazos.

Por lo tanto: $(*) = \displaystyle\oint_{\partial\Sigma} f \nabla g\, d\vec{r} = \oint_{\partial\Sigma} 1 \cdot G\, d\vec{r} = 0$, tomando $\Gamma = \partial\Sigma$

$\therefore \displaystyle\iint_{\Sigma} (\nabla f \times \nabla g) \cdot \hat{n}\, dS = 0.$ //

Anexo

Fecha: / /

Para P2,(b),(2), buscamos parametrizar una recta que une $(0,0)$ con $(\text{sen}(1),0)$. Analicemos intuitivamente el caso general:

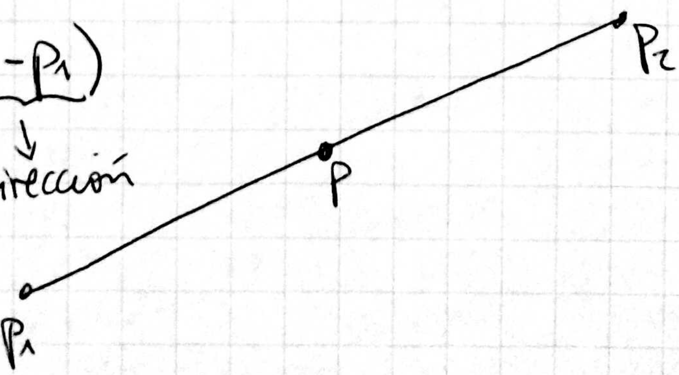
Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$. Queremos parametrizar el segmento que los une, y con una dirección tal que la parametrización "parta" en p_1 y "termine" en p_2.

Podemos pensarlo así: Partimos en p_1, y queremos avanzar a lo largo del segmento a un punto p, en un factor t.

Para avanzar a lo largo del segmento, debemos encontrar una dirección adecuada, por ejemplo, $(p_2 - p_1)$ (formalmente, este sería el vector director, de la ecuación vectorial de la recta). Así, como queremos avanzar en un factor t por la dirección $(p_2 - p_1)$, lo que se le debe agregar al punto de partida p_1, es $t(p_2 - p_1)$.

De esta manera, el punto p se caracteriza como:

$$p = \underset{\text{partida}}{p_1} + \underset{\text{avance}}{t}\,(\underbrace{p_2 - p_1}_{\text{dirección}})$$



Además, como p debe estar dentro del segmento, para la parametrización anterior, corresponde que $t \in [0,1]$, de manera que $p = p_1$ cuando $t = 0$ y $p = p_2$ cuando $t = 1$.

Fecha: / /

Reordenando:

$$p = (1-t)p_1 + t p_2 \quad , \ t \in [0,1]$$

Que es la parametrización que se usó para $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (\operatorname{sen}(1), 0)$ en la P2, b, (2).