MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 4

12 de Abril de 2017

P1. *a)* Verifique que $F(x,y,z) = (y^2\cos(x) + z^3, 2y\text{sen}(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$ es un campo conservativo y encuentre un potencial escalar para él.

b) Calcule $\int_\Gamma G \cdot d\vec{r}$, donde $G(x,y,z) = (y^2\cos(x) + 2z^3, 2y\text{sen}(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$ y Γ es la curva que consta del arco de $y = x^2$, $z = 0$ del origen al punto $(1,1,0)$, junto con el segmento recto de $(1,1,0)$ al punto $(0,0,1)$.

P2. *a)* Sea γ una curva simple, cerrada y regular por pedazos en $\mathbb{R}^2$ y sean f y g funciones de clase C^2 en una región que contiene a la región D encerrada por γ. Demuestre que

$$\int_\gamma -f\frac{\partial g}{\partial y}dx + f\frac{\partial g}{\partial x}dy = \iint_D f\nabla^2 g dxdy + \iint_D \nabla f \cdot \nabla g dxdy$$

b) Sea $F(x,y) = (x^2 + 2\text{sen}(y), e^y + 3x\cos(y))$ y $g(t) = (\text{sen}(t^3)\cos(t-1), 2te^{t-1^5})$. Calcule la integral de F sobre $\gamma = g([0,1])$ de dos maneras diferentes.

P3. *a)* Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^2. Pruebe que

$$\nabla \times (f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$$

b) Dadas $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ y $g(x,y,z) = \frac{arctan(1+z^2)}{(1+x^2+y^2)}$, calcule la integral de superficie

$$\iint_\Sigma (\nabla f \times \nabla g) \cdot \hat{n} dS$$

donde Σ es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y $\hat{n}$ es la normal que apunta hacia el origen.