

Pauta Auxiliar 3

①

Resumen:

• Integral de flujo: $\iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS$, donde, dada una parametrización de S $\vec{F}(u,v)$: $\hat{n} dS = \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \right) du dv$

• Integral de línea: $\int \vec{F} \cdot d\vec{F}$, donde, dada una parametrización de la curva $\vec{F}$, $\vec{F}(t)$: $d\vec{F} = \vec{F}'(t) dt$.

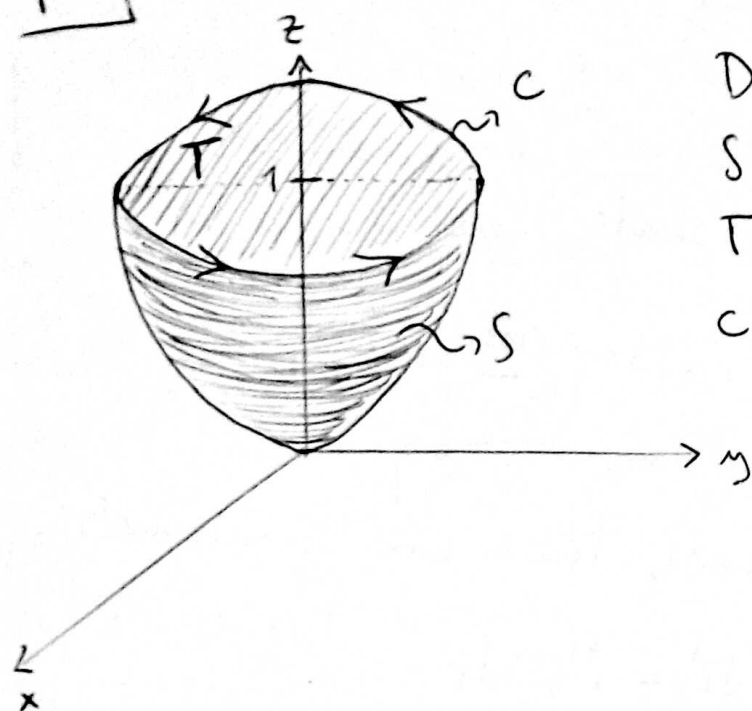
• Teorema de Gauss (o de la divergencia):

$$\iint_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dV$$

• Teorema de Stokes (o del rotor):

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{F} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS$$

P1



D: Interior del paraboloid.

S: Superficie del paraboloid

T: "Tapa" superior del paraboloid

C: Borde de la tapa T.

a) Aplicando el teorema de Stokes, tenemos que:
sobre $\text{rot}(F)$

$$\iint_S \text{rot}(\text{rot}(F)) \cdot d\vec{S} = \oint_C \text{rot}(F) \cdot d\vec{r}$$

Usando la indicación: $\text{rot}(\text{rot}(F)) = \nabla(\text{div}(F)) - \Delta F$.

Reemplazando:

$$\iint_S [\nabla(\text{div}(F)) - \Delta F] \cdot d\vec{S} = \oint_C \text{rot}(F) \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla(\text{div}(F)) \cdot d\vec{S} - \iint_S \Delta F \cdot d\vec{S} = \oint_C \text{rot}(F) \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla(\text{div}(F)) \cdot d\vec{S} = \oint_C \text{rot}(F) \cdot d\vec{r} + \iint_S \Delta F \cdot d\vec{S} //$$

1) Primero, notemos que $\Delta(\text{div}(F)) = \text{div}(\nabla(\text{div}(F)))$ (3)

Reemplazando, y luego, utilizando teorema de Gauss:

$$\iiint_D \Delta(\text{div}(F)) dV = \iiint_D \text{div}(\nabla(\text{div}(F))) dV = \iint_S \nabla(\text{div}(F)) \cdot d\vec{S}$$

$$+ \iint_T \nabla(\text{div}(F)) \cdot d\vec{S} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{No olvidan incluir este término,} \\ \text{ya que así, al considerar la} \\ \text{tapa, estamos cerrando el dominio,} \\ \text{lo cual es necesario para aplicar} \\ \text{tes. Gauss.} \end{array} \right]$$

c) Ocupando la parte (b):

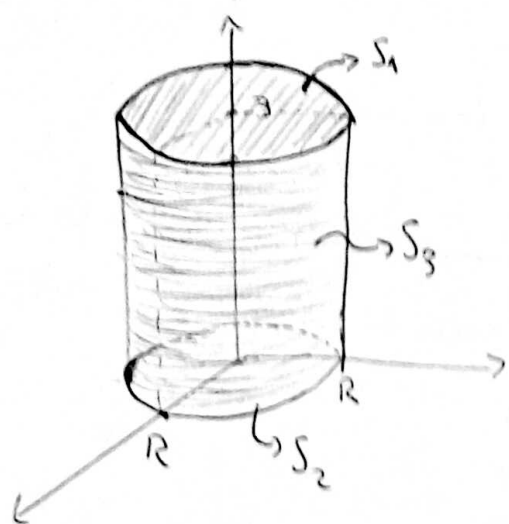
$$\iiint_D \Delta(\text{div}(F)) dV = \underbrace{\iint_S \nabla(\text{div}(F)) \cdot d\vec{S}}_{(1)} + \iint_T \nabla(\text{div}(F)) \cdot d\vec{S}$$

Usando la parte (a) para el término (1):

$$\iiint_D \Delta(\text{div}(F)) dV = \oint_C \text{rot}(F) \cdot d\vec{r} + \iint_S \Delta F \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(\text{div}(F)) \cdot d\vec{S}$$

P2)

a) La superficie descrita es:



S_1 : tapa superior del cilindro.
 S_2 : tapa inferior del cilindro
 S_3 : Manto del cilindro.

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$\Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\vec{S}$$

Calculemos los integrales por separado:

S_1 : Una parametrización de S_1 está dada por:

$$\vec{r}_1(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), 3), \quad \rho \in [0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \rho} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0); \quad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} = (-\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \rho \hat{k}$$

$$\vec{n}_1 = \frac{(0, 0, \rho)}{\|(0, 0, \rho)\|} = (0, 0, 1), \text{ con sentido hacia el exterior de } S \quad (5)$$

$$(y \quad dS = \rho d\rho d\theta)$$

Luego:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R \vec{F}(\vec{r}_1(\rho, \theta)) \rho d\rho d\theta \cdot \vec{n}_1$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R (3\rho \cos(\theta), -\rho^2 \sin(\theta), 3\rho \cos(\theta)) \cdot (0, 0, 1) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R 3\rho^2 \cos(\theta) d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\rho^3 \cos(\theta) \right]_0^R d\theta = R^3 \sin(\theta) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

S₂: Una parametrización de S₂ es:

$$\vec{r}_2(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), 0), \quad \rho \in [0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Al igual que antes, $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$, sin embargo, ésta deberá estar apuntando hacia afuera de S, por lo que, para el cálculo del flujo, consideraremos $-\vec{n}_2$ (así, el flujo "sale" de S).

Así:

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot (-\vec{n}_2) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R \vec{F}(\vec{r}_2(\rho, \theta)) \cdot (0, 0, -1) dS$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R (0, -\rho^2 \sin(\theta), 0) \cdot (0, 0, -1) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R 0 dS = 0.$$

S₃: Una parametrización de S₃ es:

$$\vec{r}_3(\theta, z) = (R \cos(\theta), R \sin(\theta), z), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, 3]$$

$$\frac{\partial \vec{r}_3}{\partial \theta} = (R \sin(\theta), R \cos(\theta), 0), \quad \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial z} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \sin(\theta) & R \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = R \cos(\theta) \hat{i} + R \sin(\theta) \hat{j}$$

$$\Rightarrow \|\vec{n}\| = R \Rightarrow \hat{n}_3 = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0), \quad dS = R d\theta dz$$

$$\text{Luego, } \iint_{S_3} F \cdot \hat{n}_3 dS = \int_0^3 \int_0^{2\pi} F(\vec{r}_3(\theta, z)) \cdot \hat{n}_3 \cdot R d\theta dz$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (Rz \cos(\theta), -R^2 \sin^2(\theta), Rz \cos(\theta)) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) R d\theta dz$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (R^2 z \cos^2(\theta) - R^3 \sin^3(\theta)) d\theta dz$$

$$= \int_0^3 \left[\int_0^{2\pi} R^2 z \cos^2(\theta) d\theta - \underbrace{\int_0^{2\pi} R^3 \sin^3(\theta) d\theta}_{=0, \text{ pues}} \right] dz$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^3(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(\theta - \pi) d\theta = 0 \quad (\text{función impar en dominio simétrico})$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 dS &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} R^2 z \cos^2(\theta) d\theta dz, \quad \cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad (7) \\
 &= R^2 \int_0^3 z dz \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2} \right) d\theta \\
 &= R^2 \cdot \frac{9}{2} \cdot \left(\pi + \underbrace{\frac{\sin(2\theta)}{4}}_0 \bigg|_0^{2\pi} \right) \\
 &= \frac{9}{2} \pi R^2.
 \end{aligned}$$

Finalmente, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\vec{S} = \frac{9}{2} \pi R^2 //$

b) Como queremos usar Gauss, debemos calcular:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}(x, y, z)) = z - 2y + x$$

Usando coordenadas cilíndricas: $\operatorname{div}(\mathbf{F}(\rho, \theta, z)) = z - 2\rho \sin(\theta) + \rho \cos(\theta)$

$$\rho \in [0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, 3], \quad dV = \rho d\rho d\theta dz$$

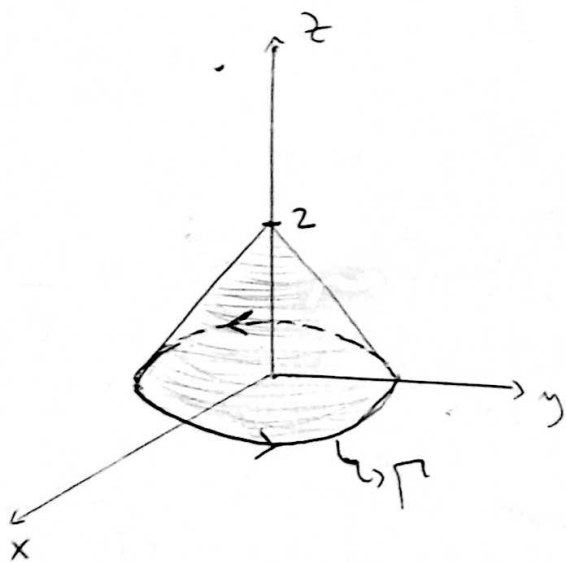
$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot d\vec{S} &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^R (z - 2\rho \sin(\theta) + \rho \cos(\theta)) \rho d\rho d\theta dz \\
 &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 z}{2} - \frac{2R^3}{3} \sin(\theta) + \frac{R^3}{3} \cos(\theta) \right) d\theta dz
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^3 \left(R^2 z \pi + \underbrace{\frac{2R^3 \cos(\theta)}{3}}_0 \bigg|_0^{2\pi} + \underbrace{\frac{R^3 \sin(\theta)}{3}}_0 \bigg|_0^{2\pi} \right) dz$$

$$= \frac{9\pi R^2}{2} //$$

P3

a)



Una parametrización de Γ es:

$$\Gamma: \begin{cases} z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\cos(\theta) \\ y = 2\sin(\theta) \\ z = 0 \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \vec{r}(\theta) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), 0), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \vec{r}'(\theta) = (-2\sin(\theta), 2\cos(\theta), 0)$$

Así, la circulación sobre Γ es:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}'(\theta) d\theta$$
~~$$= \int_0^{2\pi} (2\cos(\theta), 8\cos^3(\theta), -24\cos^2(\theta)\sin(\theta)) \cdot (-2\sin(\theta), 2\cos(\theta), 0) d\theta$$~~

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) \\ 8\cos^3(\theta) \\ -24\cos^2(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = \int_0^{2\pi} (-4\sin(\theta)\cos(\theta) + 16\cos^4(\theta)) d\theta$$

(9)

obtenemos que:

$$\begin{aligned}\cos^4(\theta) &= (\cos^2(\theta))^2 = \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)}{4} = \frac{1 + 2\cos(2\theta) + \left(\frac{1 + \cos(4\theta)}{2} \right)}{4}\end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{1}{8} + \frac{\cos(4\theta)}{8} \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \underbrace{\frac{\sin(2\theta)}{4}}_0 \Big|_0^{2\pi} + \frac{\pi}{4} + \underbrace{\frac{\sin(4\theta)}{32}}_0 \Big|_0^{2\pi}\end{aligned}$$

$$= \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \oint F \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-4\sin(\theta)\cos(\theta)) d\theta + 16 \cdot \frac{3\pi}{4}$$

$$= -4 \cdot \left(\underbrace{\frac{\sin^2(\theta)}{2}}_0 \Big|_0^{2\pi} \right) + 12\pi$$

$$= 12\pi //$$

b) Sea S el interior del círculo limitado por Γ . Por lo tanto, la normal de S (apuntando hacia arriba) será $\hat{n} = (0, 0, 1)$.

(10)

Como queremos usar Stokes, calculamos:

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-z & x^2-yz & -3xy^2 \end{vmatrix} = (-6xy - y, 3y^2 - 1, 3x^2)$$

Así, por teo Stokes:

$$\oint_{\Gamma} F \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(F) \cdot \hat{n} \, dS = \iint_S 3x^2 \, dx \, dy$$

$$\stackrel{\text{polares}}{=} \int_0^2 \int_0^{2\pi} 3\rho^2 \cos^2(\theta) \rho \, d\theta \, d\rho = \int_0^2 3\rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \rho^4 \Big|_0^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta = 12 \left(\underbrace{\pi + \frac{\sin(2\theta)}{2}}_0 \Big|_0^{2\pi} \right)$$

$$= 12\pi$$

Obs: También se hubiese podido calcular usando la superficie del manto del cono, pero hubiera sido más complicado calcular la normal. Eso resulta interesante en este problema: que "no importa la superficie, si no su frontera".