MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 3

5 de Abril de 2017

P1. Sea $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^3 y considere:

$D = \{(x,y,z) : x^2+y^2 < z < 1\}$

$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = z, z \leqslant 1\}$ orientada exteriormente

$T = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqslant 1, z = 1\}$ orientada hacia arriba

$C = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1, z = 1\}$ orientado de forma antihoraria (visto desde arriba)

a) Demuestre que

$$\iint_S \nabla(div(F)) \cdot d\vec{S} = \oint_C rot(F) \cdot d\vec{r} + \iint_S \Delta F \cdot d\vec{S}$$

Indicación: Puede serle útil la identidad $\Delta F = \nabla(div(F)) - rot(rot(F))$

b) Demuestre que

$$\iiint_D \Delta(div(F))dV = \iint_S \nabla(div(F)) \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(div(F)) \cdot d\vec{S}$$

c) Concluya que

$$\iiint_D \Delta(div(F))dV = \oint_C rot(F) \cdot d\vec{r} + \iint_S \Delta F \cdot d\vec{S} + \iint_T \nabla(div(F)) \cdot d\vec{S}$$

P2. Calcule el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = (xz, -y^2, xz)$ a través de la superficie cerrada que limita el cilindro

$$x^2+y^2 \leq R, \quad 0 \leq z \leq 3$$

a) Por definición de flujo

b) Utilizando el teorema de Gauss

P3. Calcule la circulación del campo vectorial $F = (x-z, x^3+yz, -3x^2y)$ a lo largo del circuito limitado por

$$z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}, \quad z = 0$$

a) Directamente

b) Utilizando el teorema de Stokes