MA2002-1: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 2

29 de Marzo de 2017

Definición 1 (Integral de Flujo)**.** Sea S una superficie regular orientable, $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de normales continuo sobre S, y $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S. Definimos la integral de flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S orientada según $\hat{n}$ mediante

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} := \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right) dudv,$$

donde $\varphi : D \subseteq \vec{\mathbb{R}}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación, esto es, tal que $\hat{n} = \dfrac{\vec{\varphi_u} \times \vec{\varphi_v}}{||\vec{\varphi_u} \times \vec{\varphi_v}||}$

Teorema 1 (Teorema de Gauss (o de la divergencia))**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ sobre un abierto $\bar{\Omega} \subseteq \mathcal{U}$. Entonces:*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_\Omega div(\vec{F}) dV.$$

P1. Calcule la integral de volumen $\iiint_V (2zx^2 + 2zy^2) dxdydz$ donde V es la intersección del volumen exterior al manto del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con el volumen interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1, \ z \geq 0$

P2. Considere el campo $\vec{F}(x,y,z) = xz\hat{\imath} + \hat{k}$ y la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 4 - \rho^2, \ \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \ \theta = \arctan(\frac{y}{x}), \ 0 \leq \rho \leq 2, \ \theta \in [0, 2\pi]\}$. Encuentre el flujo que pasa a través de S.

P3. Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ que se encuentra en la región $-h \leq z \leq h$, donde $h > 0$ y definida implícitamente en coordenadas cilíndricas por $\rho = 1 + z$ en $0 \leq z \leq h$ y $\rho = 1 - z$ en $-h \leq z \leq 0$.

(a) Bosqueje y encuentre una parametrización para S

(b) Considere el campo vectorial $\vec{F} = \frac{5}{\rho}\hat{\rho} + e^{-z^2}\hat{\theta} + 3z\hat{k}$ definido en coordenadas cilíndricas. Determine la región donde $\vec{F}$ es diferenciable.

(c) Calcule por definición el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S

(d) Calcule el flujo anterior haciendo uso del teorema de la divergencia para un volumen adecuado.

Indicación: Recuerde que la divergencia en coordenadas ortogonales se expresa como:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w) \right).$$