MA2002-3: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 1

22 de Marzo de 2017

P1. Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies $x^2+y^2=4,\ x^2+z^2=4+y^2$. Tomar en cuenta sólo la parte de la curva con $z \geq 0$.

(a) Encuentre una parametrización de Γ (**Sugerencia**: Use coordenadas cilíndricas).

(b) Calcule la masa suponiendo densidad de masa $\rho(x,y,z)=xy$. Puede usar argumentos de simetría.

P2. Consideremos el sistema de coordenadas dado por

$$\vec{r}(x,\rho,\theta)=(x,\rho\cos\theta,\rho\sin\theta),$$

con $x\in\mathbb{R},\theta\in[0,2\pi)$ y $\rho\geq 0$.

(a) Determinar el triedro de vectores unitarios $\hat{x},\hat{\rho},\hat{\theta}$. Son ortogonales? Calcule $\hat{\theta}\times\hat{x}$ y $\hat{\theta}\times\hat{\rho}$.

(b) Encuentre expresiones para el gradiente, divergencia, laplaciano y rotor en este sistema de coordenadas.

(c) Dada una función no negativa y diferenciable $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$, bosqueje la superficie de ecuación $y^2+z^2=f(x)^2$. Verifique que una parametrización de esta superficie es $\vec{r_1}(x,\theta)=x\hat{\imath}+f(x)\hat{\rho}$.

P3. (a) Sea $\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestre que

$$\text{rot}\int_a^b\varphi(\vec{r},t)dt=\int_a^b\text{rot }\varphi(\vec{r},t)dt.$$

Indicación: Puede usar la regla de Leibnitz: $\dfrac{\partial}{\partial u}\displaystyle\int_a^b\varphi(\vec{r},t)dt=\int_a^b\dfrac{\partial}{\partial u}\varphi(\vec{r},t)$, con $\vec{r}=(x,y,z)$ y u repreenta cualquier variable cartesiana.

(b) Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})=g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r=||\vec{r}||$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $\text{div}\vec{F}=0$ y pruebe que

$$\text{rot}(\vec{F}(t\vec{r})\times t\vec{r})=2t\vec{F}(t\vec{r})+t^2\frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r}).$$

(c) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que $\text{div}\vec{F}=0$ en una bola B de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces se puede probar (no se pide que lo haga) que la identidad anterior es válida en B. Definamos el campo vectorial $\vec{G}(\vec{r})=\int_0^1(\vec{F}(t\vec{r})\times t\vec{r})dt$. Usando lo anterior concluya que $\text{rot}\vec{G}=\vec{F}$.