

MA2001-2 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Manuel del Pino**Auxiliar:** José Palacios A. , Sebastián Urzúa B.**Auxiliar 15**

05 de Julio de 2016

1. Resumen

Teorema 1 (Teorema de Cambio de Variable). Sea Ω acotado y $f : U \rightarrow V$ continua y biyectiva. Sea $g : f(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Luego, $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y

$$\int_{f(\Omega)} g(x) dx = \int_{\Omega} g(f(y)) |det Df(y)| dy.$$

2. Preguntas

P1. a) Calcule la integral $I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 - xy + y^2) dx dy$ donde $\mathcal{D}$ es la región del plano encerrada por elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$. *Indicación:* Puede ayudarlo encontrar números positivos α, β en modo que si $x = \alpha u - \beta v, y = \alpha u + \beta v$, entonces la elipse se escribe como $u^2 + v^2 = 1$.

b) Calcule $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dx dy$.

P2. a) Usando el Teorema de Fubini, pruebe que

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_2 dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

b) Dado $\alpha \geq 1$ y una función continua $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$I_{\alpha}(f)(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \forall x \geq 0.$$

Muestre, usando Fubini, que si $\alpha, \beta \geq 1$, entonces $I_{\alpha}(I_{\beta}(f))(x) = C(\alpha, \beta) I_{\alpha+\beta}(f)(x)$, donde

$$C(\alpha, \beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy$$

P3. Calcule $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ donde $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

P4. Hallar los valores máximo y mínimo (justifique si es que existen) de la función $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + 2y^4 - x^4$ en el disco $\{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$.