MA2001-5. Cálculo en Varias Variables 2017.
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliar: Sebastian Urzua, José Manuel Palacios
Fecha: 18 de Abril del 2017

Auxiliar Repaso C1

P1

1. Encuentre, justificando claramente sus respuestas, adherencia, interior y frontera en $\mathbb{R}^2$ de los siguientes conjuntos. Justifique además si son abiertos, cerrados y/o compactos.

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \; B = \left\{ x, y : \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{n} \right\}.$$

2. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$ conjuntos no vacios. Pruebe que $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$

P2

(a) ¿Existe una sucesión de puntos $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^d$ con $x_n \neq 0$ para todo n y tal que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_\infty} = +\infty \text{ ?}$$

(b) ¿Existe alguna una sucesión $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $x_n \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ pero que $\|x_n - \bar{x}\|_{666} \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$?

P3

(a) Considere una $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ continua. Muestre entonces que,
- Si $A \subseteq \mathbb{R}^p$ cerrado, entonces $f^{-1}(A)$ es cerrado.
- Si $A \subseteq \mathbb{R}^p$ abierto, entonces $f^{-1}(A)$ es abierto

(b) Pruebe que el conjunto de ceros de un polinomio en $\mathbb{R}^d$ es cerrado.

(c) Considere la función $f(x, y, z) = xyz$ definida en todo $\mathbb{R}^3$. Pruebe que el conjunto de puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tales que $|f(x, y, z)| < 1$ es abierto.

P4

1. Sea $f(x, y) = e^{xy}$. Demuestre que f es diferenciable por definición, y encuentre su aproximación lineal afín en el punto $(0, 0)$.
2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que A es un conjunto abierto y cerrado. Demuestre que $A = \emptyset$, o bien $A = \mathbb{R}^N$. **Hint:** Parametrice un camino $\gamma(t)$ entre A y A^c. Defina $I = \{t \in [0, 1] : \gamma(s) \in A, \forall s \in [0, t]\}$ y estudie $\sup I$.

P5

1. Considere $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una família de conjuntos conexos. Muestre que si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ es un conjunto conexo. Concluya que todo conjunto <u>convexo</u> $C \subseteq \mathbb{R}^d$ es también conexo.
2. **Prop:** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ conexo por caminos, entonces A es conexo.

P6 Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado, y $g : C \to \mathbb{R}^m$ definida por $g(x) = f(x) + x$, donde f es Lipschitz de constante $K < 1$, esto es:

$$||f(x) - f(y)|| \leq K||x - y||, \; \forall x, y \in C.$$

1. Muestre que para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de C se tiene:

$$||x_p - x_q|| \leq \frac{1}{1 - K}||g(x_p) - g(x_q)||, \; \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

2. Suponiendo que $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, pruebe que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in C$.
3. Muestre que la imagen, $g(C)$, es un conjunto cerrado.

P7 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)+x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \gamma, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Encuentre γ de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.
2. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Calcule de manera genérica las derivadas direccionales de f.
4. Calcule, si es que existen, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
5. Determine en qué puntos son continuas las derivadas parciales de f.

P8 Estudie la continuidad de la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\left(e^{xy} - 1\right)}{xy}\left(x^2 + y^2\right)\right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} & \text{si } xy \neq 0 \\ (1+y^2)^{\frac{1}{|y|}} & \text{si } x = 0,\ y \neq 0 \\ (1+x^2)^{\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0,\ y = 0 \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$