MA2001-5 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Manuel del Pino.
Auxiliar: José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 4

12 de Abril de 2017

1. Resumen

Definición 1. Una función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ se dice coerciva si $\lim\limits_{||x|| \to \infty} f(x) = +\infty$

Teorema 1 (Mínimo de funciones coercivas continuas)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función continua y coerciva. Entonces existe $x_* \in \mathbb{R}^N$ tal que $f(x_*) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$*

Definición 2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A abierto, $x_0 \in A$. f **es diferenciable en** x_0 si sus derivadas parciales existen, y además:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)||}{||x - x_0||} = 0$$

Definición 3. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $x_0 \in A$. Se dice que $L(h) = f(x_0) + Df(x_0)h$ aproxima a $f(x_0 + h)$ cerca de $h = 0$. Además, se tiene que

$$\lim_{h \to 0,\ h \neq 0} \frac{f(x_0 + h) - L(h)}{||h||} = 0$$

2. Problemas

P1. Estudie la diferenciabilidad de $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ por definición. Encuentre su aproximación lineal en el punto $(3, 2)$.

P2. Considere

$$f : \mathbb{R}^n \setminus (\{0\}) \to \mathbb{R}^n$$
$$\vec{x} \to f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||_2^2}$$

Calcule el Jacobiano de f.

P3. Considere $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ se define:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - \lambda, & si \quad (x, y) \in D_1 \\ 0, & si \quad (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

(I) Encuentre λ tal que f sea continua en $D_1 \cup D_2$. De ahora en adelante, se considera dicho valor de λ.

(II) Pruebe que el grafo de f:

$$Gr(f) := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_1 \cup D_2\}$$

es cerrado y acotado.

(III) Pruebe que, dado cualquier $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, existe un punto en el grafo de f que minimiza la distancia a (x_0, y_0, z_0).

P4. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función continua tal que:

- $f(0) > 0$
- $f(x) < 0$ para todo x con $||x|| > 1$.

Demuestre que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tal que $f(x) \leq f(\bar{x}), \forall x \in \mathbb{R}^N$.

3. Propuestos

P5. *a*) Determine si existe el límite

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^4 + y^2x^2 + z^4}.$$

b) Determine si existe el límite

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{\sqrt{x^{12} + y^6 + z^4}}.$$

P6. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^6}{||(x,y)||} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

(I) Demuestre que f es una función continua.

(II) Demuestre que f alcanza su mínimo.