

# CONTROL I CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES, 2016/1

Profs. Dávila, del Pino, Frank

Tiempo: 3 horas

- (1) (a) (3pts) Encuentre adherencia, interior y frontera de los siguientes conjuntos

$$A = \{(x, \frac{1}{n}) / n \in \mathbb{N}, \quad x \in ]0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$B = \{(x, y, z) / xyz \leq 1, \quad \sin(x^2 + y^2 + 5) < x^3 + 4\} \subset \mathbb{R}^3.$$

**Solución** El conjunto  $A$  es una unión numerable de segmentos horizontales que se acumula hacia el eje  $x$ . No es posible meter una bola dentro del conjunto, por lo tanto  $\text{Int}(A) = \emptyset$ . La Adherencia es el conjunto  $A$  unido con lo que tiene adherido y que no está necesariamente en  $A$ : el resultado es

$$\text{Adh}(A) = A \cup \{(0, \frac{1}{n}) / n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, 0) / x \in [0, 1]\}.$$

Además  $\text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A) = \text{Adh}(A)$ .

Para el conjunto  $B$ , su interior queda representado por

$$\text{Int}(B) = \{(x, y, z) / xyz < 1, \quad \sin(x^2 + y^2 + 5) < x^3 + 4\}$$

y su adherencia

$$\text{Adh}(B) = \{(x, y, z) / xyz \leq 1, \quad \sin(x^2 + y^2 + 5) \leq x^3 + 4\}$$

y por lo tanto

$$\text{Fr}(B) =$$

$$\{(x, y, z) / xyz = 1, \sin(x^2 + y^2 + 5) \leq x^3 + 4\} \cup \{(x, y, z) / xyz \leq 1, \sin(x^2 + y^2 + 5) = x^3 + 4\}.$$

□

- (b) (3pts) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} xy^3 + x^2y \\ y^2 \end{bmatrix}.$$

Demuestre *usando la definición de diferenciabilidad* que  $f$  es diferenciable en el punto  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  y encuentre la matriz  $f'(0, 1)$ .

**Solución** La matriz Jacobiana de  $f$  en  $(x, y)$  está dada por

$$\begin{bmatrix} y^3 + 2xy & 3y^2x + x^2 \\ 0 & 2y \end{bmatrix},$$

y por lo tanto la “candidata” a derivada de  $f$  en  $(0, 1)$  es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sea

$$\theta(h, k) = f((0, 1) + (h, k)) - f(0, 1) - A \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}.$$

Debemos probar que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\theta(h, k)}{\|(h, k)\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \theta(h, k) &= \begin{bmatrix} \theta_1(h, k) \\ \theta_2(h, k) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h(1+k)^3 + h^2(1+k) - 0 - h \\ (1+k)^2 - 1 - 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hk(3+3k+k^2) + h^2(1+k) \\ k^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Usando que

$$|hk| + h^2 \leq 2(h^2 + k^2), \quad \|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$$

obtenemos que

$$0 \leq \frac{|\theta_1(h, k)|}{\|(h, k)\|} \leq \sqrt{h^2 + k^2}(4 + 4|k| + k^2)$$

y por lo tanto

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\theta_1(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

En modo similar,

$$0 \leq \frac{|\theta_2(h, k)|}{\|(h, k)\|} \leq \sqrt{h^2 + k^2}$$

y concluimos el resultado: La función  $f$  es diferenciable en  $(0, 1)$  y

$$f'(0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

(2) Considere la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x| \sin(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) (2pts) Demuestre que  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

**Solución.** Sea  $(x_n, y_n)$  una sucesión genérica con  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ . Tenemos que  $|x| |\sin(y)| \leq |x| |y| \leq x^2 + y^2$ , y por lo tanto

$$|f(x_n, y_n)| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

Concluimos que  $f(x_n, y_n) \rightarrow 0 = f(0, 0)$  y por ende el resultado. □

(b) (2pts) Determine, si es que existen, las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

**Solución.** Por definición tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0,$$

ya que  $f(t, 0) = 0$ . Del mismo modo, como  $f(0, t) = 0$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

□

(c) (2pts) Determine si  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .

**Solución.** Calculemos la derivada direccional en la dirección  $(e^1, e^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ . Tenemos que

$$f'((0, 0); (e^1, e^2)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(te^1, te^2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^1 \sin(te^2)}{t} = \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, si  $f$  fuera diferenciable, se debiera tener que

$$f'((0, 0); (e^1, e^2)) = e^1 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + e^2 \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

gracias al resultado de la parte (b). Por lo tanto,  $f$  no puede ser diferenciable en  $(0, 0)$ . □

- (3) (a) (3pts) Sea  $A$  un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^n$  y  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en todo punto de  $A$ , relativamente a  $A$ . Demuestre que el conjunto

$$B = \{x \in A / f(x) = 0\}$$

es cerrado en  $\mathbb{R}^n$ .

**Solución.** Sea  $x_0 \in \text{Adh}(B)$ . Entonces existe una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$  con  $x_n \rightarrow x_0$ . En particular  $x_n \in A$ , por ende  $x_0 \in \text{Adh}(A)$ . Como  $A$  es cerrado,  $x_0 \in A$ . Por otro lado, como  $f$  es continua en  $x_0$  relativamente a  $A$ , concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Por otro lado, como  $x_n \in B$ , tenemos que  $f(x_n) = 0$  para todo  $n$ . En conclusión  $f(x_0) = 0$ , por lo tanto  $x_0 \in B$ . Así, tenemos que  $\text{Adh}(B) \subset B$ , y por ende  $B$  es cerrado. □

(b) (3pts) Sea

$$f(x, y) = \frac{e^{2x^2+2y^2+y^4}}{x^2+y^2-1}.$$

Demuestre que  $f$  alcanza su valor mínimo en el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 1\},$$

esto es existe  $(x_0, y_0) \in A$  tal que  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  para todo  $(x, y) \in A$ .

*Indicación: Muestre primero que existen números  $1 < a < 2 < b$  tales que  $f(x, y) > f(1, 1)$  si  $x^2 + y^2 > b$  o si  $1 < x^2 + y^2 < a$ .*

**Solución.** Observemos que

$$f(x, y) > \frac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2-1} \quad \forall (z, y) \in A. \quad (*)$$

Tenemos que la función  $g(t) = \frac{e^t}{t-1}$  satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = +\infty.$$

Por lo tanto existen números  $1 < a < 2 < b$  tales que

$$f(1, 1) = e^5 < g(t) \quad \text{si } 1 < t < a \quad \text{ó} \quad t > b.$$

Concluimos a partir de (\*) que  $f(x, y) > f(1, 1)$  si  $1 < x^2 + y^2 < a$  ó  $x^2 + y^2 > b$ . Sea

$$B = \{(x, y) / a \leq x^2 + y^2 \leq b\}.$$

Entonces  $A$  es cerrado y acotado y  $f$  es continua en todo punto de  $A$ . Por lo tanto  $f$  alcanza su valor mínimo en  $A$ : Existe  $(x_0, y_0) \in B$  tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B$$

Por otra parte, tenemos que

$$f(1, 1) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A \setminus B$$

y como  $f(x_0, y_0) \leq f(1, 1)$ , concluimos que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A.$$

□