

CONTROL I CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES, 2016/1

Profs. J. Dávila, M. del Pino, A. Frank

Tiempo: 3 horas

- (1) (a) (3pts) Encuentre adherencia, interior y frontera de los siguientes conjuntos

$$A = \{(x, \frac{1}{n}) / n \in \mathbb{N}, \quad x \in]0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$B = \{(x, y, z) / xyz \leq 1, \quad \sin(x^2 + y^2 + 5) < x^3 + 4\} \subset \mathbb{R}^3.$$

- (b) (3pts) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} xy^3 + x^2y \\ y^2 \end{bmatrix}.$$

Demuestre *usando la definición de diferenciabilidad* que f es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ y encuentre la matriz $f'(0, 1)$.

- (2) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x| \sin(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) (2pts) Demuestre que f es continua en $(0, 0)$

- (b) (2pts) Determine, si es que existen, las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

- (c) (2pts) Determine si f es diferenciable en $(0, 0)$.

- (3) (a) (3pts) Sea A un conjunto cerrado en \mathbb{R}^n y $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en todo punto de A , relativamente a A . Demuestre que el conjunto

$$B = \{x \in A / f(x) = 0\}$$

es cerrado en \mathbb{R}^n .

- (b) (3pts) Sea

$$f(x, y) = \frac{e^{2x^2 + 2y^2 + y^4}}{x^2 + y^2 - 1}.$$

Demuestre que f alcanza su valor mínimo en el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 1\},$$

esto es existe $(x_0, y_0) \in A$ tal que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in A$.

Indicación: Muestre primero que existen números $1 < a < 2 < b$ tales que $f(x, y) > f(1, 1)$ si $x^2 + y^2 > b$ o si $1 < x^2 + y^2 < a$.