

**MA2001-1 Cálculo en Varias Variables****Profesor:** Marcelo Leseigneur P.**Auxiliares:** Patricio Foncea Araneda - Pedro Pérez.

# Control 1

27 de Abril 2012

**Indicación:**

Las preguntas 1, 2 y 3 son obligatorias. De las dos preguntas restantes, usted puede elegir y contestar una sola de ellas. En total, debe responder 4 preguntas. *Escoja sabiamente.*

**P1.** Considere  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$  definida como

$$T[f](x) = \int_a^b K(x, t)f(t)dt \quad \forall x \in [a, b]$$

- (1,5 ptos.) Pruebe que  $T$  está bien definida, es decir,  $\forall f \in C([a, b]), T[f] \in C([a, b])$ .  
**Hint:** Utilice la continuidad de  $K(x, t)$  y analice  $|T[f](x) - T[f](y)|$  para  $x, y \in [a, b]$
- (1,5 ptos.) Pruebe que  $T : (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([a, b]), \|\cdot\|_1)$  es continua. ¿Lo es con la norma  $\|\cdot\|_\infty$  en el espacio de llegada? ¿Por qué?
- (1,5 ptos.) Pruebe que  $I_\infty = \{f \in C([a, b]) : T[f] = f\}$  es cerrado para la norma  $\|\cdot\|_\infty$ .
- (1,5 ptos.) ¿Bajo qué condiciones  $T$  es contractante? ¿Qué ocurre con el conjunto  $I_\infty$  si  $T$  es contractante? Argumente.

**P2.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n., demuestre que:

- (1,5 ptos.) Sea  $x_0 \in E$  y  $r > 0$ . Entonces  $B(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$  es abierto en  $E$ .
- (1,5 ptos.) Si  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $A$  abierto y  $B$  cualquiera, entonces  $A + B = \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in A, y \in B\}$  es abierto.
- (1,5 ptos.) Definamos la distancia de un punto  $x \in E$  a un conjunto  $A \subseteq E$  como la cantidad  $d_A(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$ . Demuestre que  $\bar{A} = \{x \in E : d_A(x) = 0\}$ .
- (1,5 ptos.) Sea  $A \subseteq E$ , demuestre que  $\text{int}(A^c)^c = \bar{A}$ .

**P3.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (1,5 ptos.) Determinar el dominio y continuidad de  $f$ .
- (1,5 ptos.) Demostrar que  $f$  es diferenciable en  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
- (1,5 ptos.) Determinar para qué dirección existen las derivadas direccionales en  $(0, 0)$ .
- (1,5 ptos.) Estudie la diferenciabilidad en  $(0, 0)$ .

**P4.** Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Se define  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$  donde  $u(x, y) = x + y$  y  $v(x, y) = \sin(x - y)$ .

a) (3 ptos.) Demuestre que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\cos^2(x - y)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

y explicita en que puntos están evaluadas cada una de las derivadas parciales.

b) (1,5 ptos.) Verifique lo anterior para  $f(u, v) = v^2 - u \cdot \sin^{-1}(v)$ .

c) (1,5 ptos.) Encuentre el plano tangente de la función  $f(u, v)$  anterior, en el punto  $(1, 0)$ .

**P5.** a) Determine si las siguientes funciones son continuas:

(i) (1,5 ptos.)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^4 + 2y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(ii) (1,5 ptos.)  $g : [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y) = \begin{cases} \tan(xy)^{\frac{1}{1-\tan(xy)}} & (x, y) \neq (\frac{\pi}{4}, 1) \\ e^{-1} & (x, y) = (\frac{\pi}{4}, 1) \end{cases}$$

(iii) (1,5 ptos.)  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(Vea para que valores de  $\alpha$ ,  $h(x, y)$  es continua).

b) Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(i) (1 pto.) Calcule y dibuje las curvas de nivel de  $f$ .

(ii) (0,5 ptos.) Utilizando las curvas de nivel calculadas en el punto anterior, pruebe que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  no existe.