

**MA22A – Cálculo en Varias Variables**  
**PAUTA CONTROL # 1 - Primavera 2006**

**Problema 1:**

a) Sea  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

- i) Analice si  $d$  proviene o no de una norma. De ser así, demuéstrelo. En caso contrario, dé un contraejemplo.
- ii) Demuestre que  $(\mathbb{R}, d)$  es completo.

**Sol:**

i)  $d$  no proviene de una norma, pues es claro que  $d(\lambda x, \lambda y) = \frac{|\lambda| \cdot |x - y|}{1 + |\lambda| |x - y|} \neq |\lambda| d(x, y)$

ii) Puesto que  $|x - y| \geq 0$  se tiene que  $0 \leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \leq |x - y|$  donde esta última es la métrica usual en  $\mathbb{R}$ . Ahora sea  $x_n$  una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{R}$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Dado que al ser de Cauchy es convergente con la métrica usual,  $\exists N; \forall m, n > N; \frac{|x_n - x_m|}{1 + |x_n - x_m|} \leq |x_n - x_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists N; \forall m, n > N; \frac{|x_n - x_m|}{1 + |x_n - x_m|} < \varepsilon$ . Esto es,  $x_n$  converge con la métrica  $d$

b) Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n., y  $F$  un s.e.v.n. de  $E$ . Demuestre que:

$$B[0, 1] \subseteq F \Rightarrow F = E$$

Indicación: Puede serle útil demostrar por contradicción.

**Sol:**

Supongamos  $F \subsetneq E$ . Luego  $\exists x_0 \neq 0; x_0 \in E \wedge x_0 \notin F$ . Claramente  $\frac{x_0}{\|x_0\|} \notin F$ .

Pero  $\left\| \frac{x_0}{\|x_0\|} \right\| = \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|} = 1 \Rightarrow \frac{x_0}{\|x_0\|} \in B[0, 1] \subseteq F$ . Contradicción. Luego  $F = E$ .

c) Considere el espacio  $(E, d)$ , donde  $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  es una ultramétrica, es decir:

$$u.1) \quad \forall x, y \in E \quad 0 \leq d(x, y) < \infty \wedge d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$u.2) \quad \forall x, y \in E \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$u.3) \quad \forall x, y, z \in E \quad d(x, z) \leq \max \{ d(x, y), d(y, z) \}$$

i) Pruebe que para cualquier  $y \in E$ ,  $r > 0$  fijos, se tiene que:

$$S = \{ x \in E / d(x, y) = r \} \text{ es Abierto.}$$

ii) Deduzca además que en el caso  $E = \mathbb{R}^n$  una ultramétrica no puede ser equivalente a la métrica Euclidiana.

Indicación: Puede resultarle útil saber que si  $d(x, y)$  es ultramétrica, entonces:  
 $d(x, y) > d(y, z) \Rightarrow d(x, y) = d(x, z)$

**Sol:**

i) Sea  $x \in S$ , luego  $d(x, y) = r$ . Basta demostrar que para algún  $\varepsilon > 0$ ,  $B(x, \varepsilon) \subseteq S$ .

Sea entonces  $\varepsilon < r$  y  $z \in B(x, \varepsilon)$ .

Luego  $d(x, z) < \varepsilon < r = d(x, y)$ , esto es:  $d(y, x) > d(x, z)$ , y utilizando la indicación:

$\Rightarrow d(y, x) = d(y, z)$  con esto, sabiendo que  $d(x, y) = r$ , tenemos que  $d(z, y) = r$  y por lo tanto  $z \in S$ .

ii) Puesto que usando la métrica euclidiana  $S$  es un conjunto cerrado, ambas métricas no pueden ser equivalentes.

## Problema 2:

Determine la continuidad en el origen de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + x \sin(y)}{\sqrt{x^2 + y^2} - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad (\text{y nula en otro caso})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 |y|^\alpha}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(en función de  $\alpha$ )

**Sol:**

a)

Candidato a límite: 0

haciendo el cambio a coordenadas polares en la función nos queda:

$$f(x, y) = F(r, \theta) = \frac{r \cos(\theta) \sin(\theta) (r \cos(\theta) + \frac{\sin(\theta) r \sin(\theta)}{r \sin(\theta)})}{\sqrt{1 - \cos(\theta) \sin(\theta)}} . \text{ Consideremos ahora la}$$

función  $T(\theta) = 1 - \cos(\theta) \sin(\theta)$  . claramente  $T(\theta) \neq 0$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$  . luego podemos acotar como sigue:

$|F(r, \theta)| \leq \frac{r M}{\sqrt{T(\theta)}}$  (pues seno y coseno son acotados). Luego el límite es cero, y hay continuidad.

b)

El candidato a límite nuevamente es cero. Pasando a coordenadas polares:

$$\left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{r^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \right| = r^2 |\cos^4 \theta + \sin^4 \theta| \leq r^2 M \leq \varepsilon$$

donde M es una cota proveniente del hecho que seno y coseno son acotados. Con esto se concluye que el límite es cero, y por lo tanto hay continuidad.

c)

Buscaremos valores de  $\alpha$  para los cuales la función tiene límite 0 en el origen.

$$\left| \frac{x^2 |y|^\alpha}{x^6 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 (y^2 + x^6)^{\alpha/2}}{x^6 + y^2} \right| \leq |(x^6 + y^2)^{1/3} (x^6 + y^2)^{\alpha/2 - 1}| = |(x^6 + y^2)^{\alpha/2 - 2/3}|$$

para que exista convergencia a cero, el exponente debe ser positivo. esto se tiene para  $\alpha > 4/3$  .

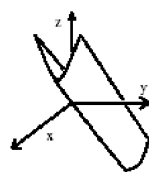
Si  $\alpha \leq 4/3$  no hay continuidad. Basta tomar  $y = x^3$  . Se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^{3\alpha - 4} \neq 0 \text{ si } \alpha \leq \frac{4}{3} .$$

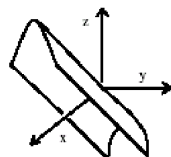
### Problema 3:

a) Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x + y^2$

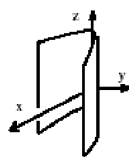
- Grafique las curvas de nivel de  $f$  , detallando los casos  $c=0$ ,  $c=-1$  y  $c=1$ .
- Dibuje la curva que se genera al intersectar  $f$  con el plano  $x=0$
- Dibuje la curva que se genera al intersectar  $f$  con el plano  $y=0$
- Indique cual de los siguientes dibujos corresponde a la representación gráfica de  $f$



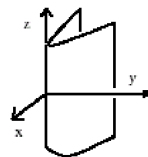
1



2



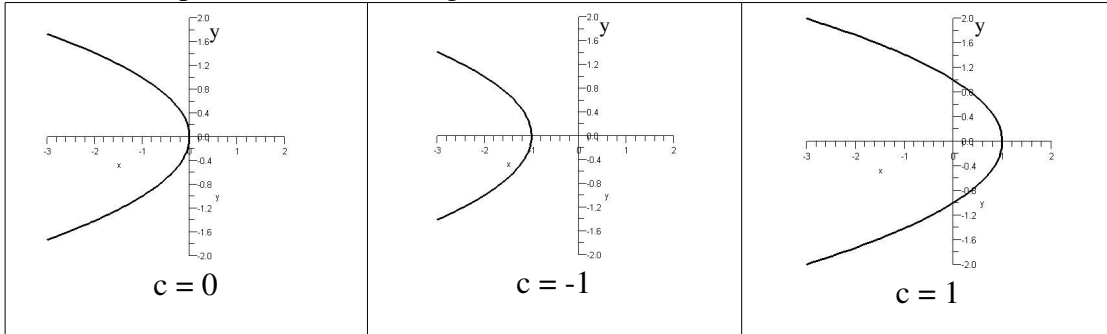
3



4

**Sol:**

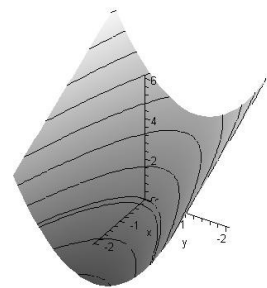
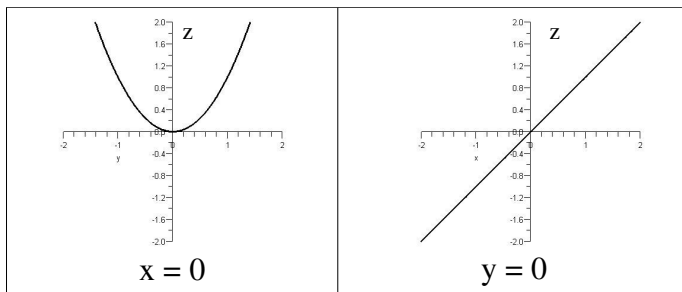
Las ecuaciones obtenidas para  $f(x, y) = c$  son parábolas desplazadas una distancia  $c$  del origen. Los gráficos correspondientes son los siguientes.



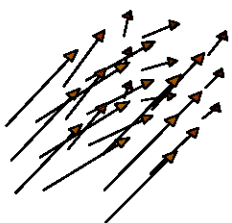
Al evaluar  $f(x, y)$  en  $x = 0$ , obtenemos una parábola en el plano  $y$ - $z$ .

En cambio, al evaluar en  $y = 0$ , obtenemos una recta en el eje  $x$ - $z$ .

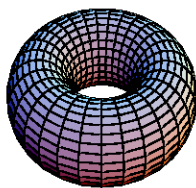
Con estos datos construimos un 'esqueleto' de la función (figura de la derecha) y resulta ser la N°1



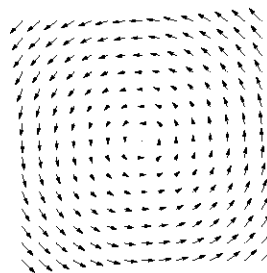
b) Indique la correspondencia entre las siguientes figuras y las funciones más abajo. Agregue un comentario breve justificando su decisión.



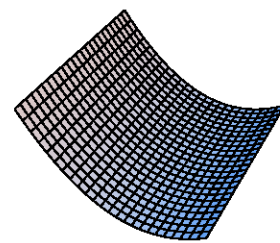
I



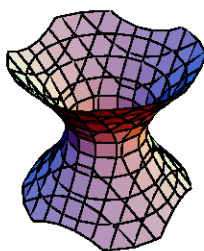
II



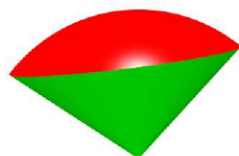
III



IV



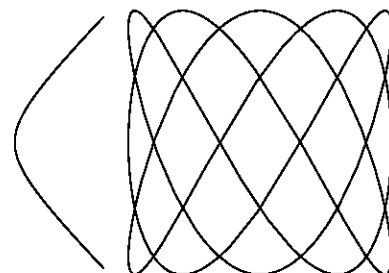
V



VI



VII



VIII

<i>Número</i>	<i>Función</i>	<i>Notas</i>
II	$\vec{r}(s, t) = \langle (2 + \cos(s)) \cos(t), (2 + \cos(s)) \sin(t), \sin(s) \rangle$	2 variables (superficie) espacio de llegada tridimensional, funciones periódicas.
VIII	$\vec{r}(t) = \langle \cos(3t), \sin(5t) \rangle$	1 variable (curva) espacio de llegada plano, funciones periódicas.
V	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	Analogía con la ecuación de la hipérbola en 2-dimensiones.
IV	$z = f(x, y) = x^2 - y$	parabólica en dirección x, lineal en y
I	$\vec{F}(x, y, z) = \langle -y, x, 1 \rangle$	vectores en espacio tridimensional
VI	$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0$	3 volúmenes: esfera unitaria, cono y semiespacio superior.
VII	$g(x, y) = x^2 - y^2 = 1$	ecuación de la hipérbola. MA12A
III	$\vec{F}(x, y) = \langle -y, x \rangle$	vectores en espacio 2-dimensional.