

MA22A-01 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES  
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR  
FECHA: 18 / 08 / 2004

Tiempo: 3 horas

## Control # 1

1. a) Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A, B$  subconjuntos de  $X$  tales que  $A \subseteq B$ . Pruebe que  $\text{Int}A \subseteq \text{Int}B$  y que  $\text{Adh}A \subseteq \text{Adh}B$ .  
Sucede lo mismo con  $\text{Fr}(A)$  y  $\text{Fr}(B)$ ? Demuéstrelo o de un contraejemplo.
- b) Dibuje los siguientes conjuntos  $A$ , luego calcule su interior, adherencia y frontera. Concluya si  $A$  es abierto, cerrado, ninguno o ambos. Argumente.

(i)  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$

(ii)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1, x^2 + y^2 < 1\}$

(iii)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2 \ \forall r, 0 < r < 1, r \in \mathbb{Q}\}$

2. Para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , considere  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $f_n(t) = e^{2\pi n t i}$ . Sean,

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_0^1 (f(t) \overline{g(t)} + f'(t) \overline{g'(t)}) dt$$

- a) Pruebe que  $\langle, \rangle_1$  y  $\langle, \rangle_2$  son productos internos en  $C^1[0, 1]$ .
- b) Pruebe que  $\langle f_n, f_m \rangle_1 = 0$  si  $n \neq m$  y que  $\|f_n - f_m\|^2 = 2$ , donde  $\|\cdot\|$  es la norma inducida por  $\langle, \rangle_1$ .
- c) Pruebe que  $\langle f_n, f_m \rangle_2 = 0$  si  $n \neq m$  y que  $\|f_n - f_m\|^2 = 2 + 4\pi^2(n^2 + m^2)$ , donde  $\|\cdot\|$  es la norma inducida por  $\langle, \rangle_2$ .

### Indicación:

$$a + ib = z \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{z} = a - ib, e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta), \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}, \overline{xy} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$z\bar{z} = |z|^2, \int \bar{f} = \overline{\int f}$$

Recuerde además que en  $\mathbb{C}$  un p.i debe cumplir  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

3. a) Sea  $\mathbb{Z}^+$  el conjunto de todos los enteros positivos, considerado como un subespacio de  $(\mathbb{R}, d)$  con  $d(x, y) = |x - y|$ , es decir,  $(\mathbb{Z}^+, d)$  es espacio métrico. Describa los conjuntos abiertos y cerrados de  $\mathbb{Z}^+$ .
- b) Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , y sean  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  y  $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$  espacios métricos, con:  
 $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p}$   
 $d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$ .  
 Demuestre que:

$$d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq \sqrt[p]{n} \cdot d_\infty(x, y) \quad \forall p \geq 1$$

Luego, deduzca que  $B_{d_\infty}(x, n^{-1/p}\varepsilon) \subseteq B_{d_p}(x, \varepsilon) \subseteq B_{d_\infty}(x, \varepsilon)$

- c) Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $x \in A$ , y sea  $p \geq 1$  arbitrario. Demuestre que si existe  $\varepsilon > 0$  con  $B_{d_p}(x, \varepsilon) \subseteq A$  entonces existe  $\varepsilon' > 0$  con  $B_{d_\infty}(x, \varepsilon') \subseteq A$ , y vice versa.
- d) Dado  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , sea  $Int_p(A)$  el interior de A cuando  $d_p$  es usada como métrica en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $Int_\infty(A)$  el interior de A cuando  $d_\infty$  es usada como métrica en  $\mathbb{R}^n$ . Demuestre que  $Int_p(A) = Int_\infty(A)$ . Concluya que los conjuntos abiertos en  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  y  $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$  son los mismos.

## Pauta Control 1

1- a)

$$A \subseteq B$$

$$\text{Int} A = \{x \in A \mid \exists \epsilon, B(x, \epsilon) \subseteq A\}$$

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$B(x, \epsilon) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow B(x, \epsilon) \subseteq B$$

$$\Rightarrow \text{Int} A \subseteq \text{Int} B = \{x \in B \mid B(x, \epsilon) \subseteq B\}$$

Por otro lado,  $\Rightarrow B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow B(x, \epsilon) \cap B \neq \emptyset$

$$\text{Adh} A = \{x \in A \mid \forall \epsilon, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset\} \subseteq \text{Adh} B = \{x \in B \mid \forall \epsilon, B(x, \epsilon) \cap B \neq \emptyset\}$$

Notemos además que no se cumple  $\text{Fr}(A) \subseteq \text{Fr}(B)$ .

En efecto,

$$\text{Sea } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2\}$$

Claramente  $A \subseteq B$

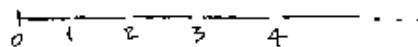
$$\text{Fr}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\text{Fr}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}$$

$$\text{Fr} A \not\subseteq \text{Fr} B$$

b)

i)



$$\text{Int} A = A$$

$$\text{Adh} A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \text{Fr}(A) = \mathbb{N}$$

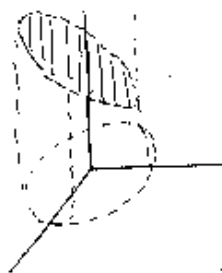
$\neq$   
A abierto

→ unión de abiertos

→ Bordas de los intervalos

→ intervalos  $(n, n+1)$  unidos con sus bordes.

ii)



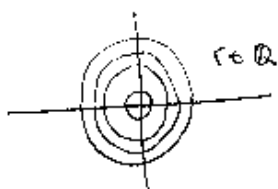
$$\text{Int } A = \emptyset \quad \left( \begin{array}{l} \text{Bolas son esferas.} \\ \text{estamos en } \mathbb{R}^3 \end{array} \right)$$

$$\text{Adh } A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1, x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$\text{Fr } A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1, x^2 + y^2 = 1 \}$$

$\Rightarrow$  no es abierto ni cerrado

iii)



$$\text{Int } A = \emptyset$$

$$\text{Adh } A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$\text{Fr } A = \text{Adh } A \setminus \text{Int } A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1 \}$$

$\Rightarrow$  no es abierto ni cerrado.

2. a)  $\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 f \bar{g} dt$

i)  $\langle f, f \rangle_1 = \int_0^1 f \bar{f} dt = \int_0^1 |f|^2 dt \geq 0$

$\langle f, f \rangle_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f|^2 dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$

ii)  $\langle f, g \rangle_1 = \overline{\langle g, f \rangle_1}$

En efecto

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_1 &= \int_0^1 f \bar{g} dt = \int_0^1 \overline{(\bar{f} g)} dt = \overline{\int_0^1 g \bar{f} dt} \\ &= \overline{\langle g, f \rangle_1} \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad \begin{cases} \langle cf, g \rangle_1 = c \langle f, g \rangle_1 \\ \langle f, cg \rangle_1 = \bar{c} \langle f, g \rangle_1 \end{cases}$$

En efecto,

$$\langle cf, g \rangle_1 = \int_0^1 cf \bar{g} dt = c \int_0^1 f \bar{g} dt = c \langle f, g \rangle_1$$

$$\text{y } \langle f, cg \rangle_1 = \overline{\langle cg, f \rangle_1} = \bar{c} \overline{\langle g, f \rangle_1} = \bar{c} \langle f, g \rangle_1$$

$$\text{iv)} \quad \langle f+h, g \rangle_1 = \langle f, g \rangle_1 + \langle h, g \rangle_1$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \langle f+h, g \rangle_1 &= \int_0^1 (f+h) \bar{g} dt = \int_0^1 f \bar{g} + h \bar{g} dt \\ &= \int_0^1 f \bar{g} dt + \int_0^1 h \bar{g} dt = \langle f, g \rangle_1 + \langle h, g \rangle_1 \end{aligned}$$

$\therefore \langle \cdot, \cdot \rangle_1$  es p.i.

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_0^1 f \bar{g} + f' \bar{g}' dt$$

$$\text{i)} \quad \langle f, f \rangle_2 = \int_0^1 f \bar{f} + f' \bar{f}' dt = \int_0^1 |f|^2 + |f'|^2 dt \geq 0$$

$$\langle f, f \rangle_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f|^2 + |f'|^2 dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$$\text{ii)} \quad \langle f, g \rangle_2 = \overline{\langle g, f \rangle_2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_2 &= \int_0^1 f \bar{g} + f' \bar{g}' dt = \int_0^1 \overline{\bar{f} g + \bar{f}' g'} dt = \overline{\int_0^1 \bar{f} g + \bar{f}' g' dt} \\ &= \overline{\langle g, f \rangle_2} \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad \left. \begin{aligned} \langle cf, g \rangle_2 &= c \langle f, g \rangle_2 \\ \langle f, cg \rangle_2 &= \bar{c} \langle f, g \rangle_2 \end{aligned} \right\}$$

En efecto

$$\begin{aligned} \langle cf, g \rangle_2 &= \int_0^1 cf \bar{g} + cf' \bar{g}' dt \\ &= c \bar{c} \int_0^1 f \bar{g} + f' \bar{g}' dt = c \bar{c} \langle f, g \rangle_2 \end{aligned}$$

$$\text{iv)} \quad \langle f+h, g \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2 + \langle h, g \rangle_2$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \langle f+h, g \rangle_2 &= \int_0^1 (f+h) \bar{g} + (f'+h') \bar{g}' dt = \int_0^1 f \bar{g} + f' \bar{g}' dt + \int_0^1 h \bar{g} + h' \bar{g}' dt \\ &= \langle f, g \rangle_2 + \langle h, g \rangle_2 \end{aligned}$$

∴  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  es un p.i.

b)  $n \neq m$

$$\langle f_n, f_m \rangle_1 = \int_0^1 e^{2\pi i n t} \overline{e^{2\pi i m t}} dt$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i \lambda (n-m)} dt = \frac{e^{2\pi i \lambda (n-m) t}}{2\pi i \lambda (n-m)} \Big|_0^1$$

$$= \frac{e^{2\pi i (n-m)} - 1}{2\pi i (n-m)} = 0$$

$$\text{pues } e^{2\pi i (n-m)} = \underbrace{\cos(2\pi(n-m))}_1 + i \underbrace{\sin(2\pi(n-m))}_0 = 1$$

• Por otro lado,

$$\text{Si } n=m$$

$$\begin{aligned}\langle f_n, f_n \rangle &= \int_0^1 e^{2\pi i n t} \overline{e^{2\pi i n t}} dt \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i n (n-n)t} dt = 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f_n - f_m\|^2 = \langle f_n - f_m, f_n - f_m \rangle = \underbrace{\langle f_n, f_n \rangle}_1 - \underbrace{\langle f_n, f_m \rangle}_0 - \underbrace{\langle f_m, f_n \rangle}_0 + \underbrace{\langle f_m, f_m \rangle}_1$$

$$\boxed{\therefore \|f_n - f_m\|^2 = 2}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } n \neq m \\ \langle f_n, f_m \rangle_2 &= \int_0^1 e^{2\pi i (n-m)t} + 2\pi n i e^{2\pi n i t} (-2\pi m i) e^{-2\pi m i t} dt \\ &= \underbrace{\int_0^1 e^{2\pi i (n-m)t} dt}_{\text{parte (b)}} + \underbrace{\int_0^1 (+4\pi^2 nm) e^{2\pi (n-m)i t} dt}_{\text{por parte (b)}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle f_n, f_m \rangle_2 = 0 \quad \text{si } n \neq m.$$

$$\text{Si } n=m$$

$$\begin{aligned}\langle f_n, f_n \rangle_2 &= \int_0^1 e^{2\pi i (n-n)t} dt + 4\pi^2 nm \int_0^1 e^{2\pi (n-n)i t} dt \\ &= 1 + 4\pi^2 nm\end{aligned}$$

Luego,

$$\|f_n - f_m\|^2 = \langle f_n - f_m, f_n - f_m \rangle = \langle f_n, f_n \rangle - \overbrace{\langle f_n, f_m \rangle}^0 - \overbrace{\langle f_m, f_n \rangle}^0 + \langle f_m, f_m \rangle$$

$$= 1 + 4\pi^2 n^2 + 1 + 4\pi^2 m^2$$

$$\boxed{\|f_n - f_m\|^2 = 2 + 4\pi^2 (n^2 + m^2)}$$

3.-

a) Consideremos  $\{k\}$  con  $k \in \mathbb{Z}^+$

$$B(k, 1/2) = \{k\} \Rightarrow B(k, \varepsilon) = \{k\}$$

$\therefore \{k\}$  es abierto en  $(\mathbb{Z}^+, d)$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{k\} \Rightarrow \mathbb{Z}^+$  es abierto por unión de abiertos.

Además dada una bola de centro  $k$  tenemos que  $B(k, \varepsilon) \cap \{k\} \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon$

$\Rightarrow \{k\}$  es cerrado.

Análogamente tomemos  $\mathbb{Z}^+$  como subespacio de  $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$B(k, \varepsilon) \cap \mathbb{Z}^+ \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \text{ y } k \in \mathbb{Z}^+$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^+$  es cerrado y todo subconjunto  $\downarrow$  finito de  $\mathbb{Z}^+$  es cerrado



b) Eligamos  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que

$$d_{\infty}(x, y) = |x_i - y_i| = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

$$\Rightarrow |x_i - y_i|^p \leq |x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \dots + |x_n - y_n|^p \leq n |x_i - y_i|^p$$

$$\Rightarrow |x_i - y_i| \leq \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p} \leq \sqrt[p]{n} |x_i - y_i|$$

$$\therefore d_{\infty}(x, y) \leq d_p(x, y) \leq \sqrt[p]{n} d_{\infty}(x, y)$$

Luego,

$$\text{Si } y \in B_{d_p}(x, \varepsilon) \Rightarrow d_p(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d_{\infty}(x, y) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow y \in B_{d_p}(x, \varepsilon) \Rightarrow y \in B_{d_{\infty}}(x, \varepsilon)$$

$$\boxed{\therefore B_{d_p}(x, \varepsilon) \subseteq B_{d_{\infty}}(x, \varepsilon)}$$

$$\text{Si } y \in B_{d_{\infty}}(x, n^{-1/p} \varepsilon) \Rightarrow n^{1/p} d_{\infty}(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d_p(x, y) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow y \in B_{d_{\infty}}(x, n^{-1/p} \varepsilon) \Rightarrow y \in B_{d_p}(x, \varepsilon)$$

$$\boxed{\therefore B_{d_{\infty}}(x, n^{-1/p} \varepsilon) \subseteq B_{d_p}(x, \varepsilon)}$$

c) Por parte (b) tenemos si  $B_{d_{\infty}}(x, \varepsilon) \subseteq A$  entonces  $B_{d_p}(x, \varepsilon) \subseteq A$ .

Luego,  $B_{d_p}(x, \varepsilon') \subseteq A$  se cumple con  $\varepsilon = \varepsilon'$

Inversamente si  $B_{d_p}(x, \varepsilon) \subseteq A \Rightarrow B_{d_{\infty}}(x, \varepsilon') \subseteq A$  con  $\varepsilon' = n^{-1/p} \varepsilon$

por parte (b).

d)

$$x \in \text{Int}_p(A) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad B_p(x, \varepsilon) \subseteq A$$

$$x \in \text{Int}_\infty(A) \Leftrightarrow \exists \varepsilon' > 0 \quad B_\infty(x, \varepsilon') \subseteq A$$

pero lo demostrado en (c) nos dice que ambas equivalencias son equivalentes entre si.

$$\Rightarrow \text{Int}_p(A) = \text{Int}_\infty(A)$$

Un conjunto es abierto ssi es igual a su interior

$\Rightarrow$  Si  $A$  es abierto en  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  entonces

$$A = \text{Int}_p(A)$$

pero  $\text{Int}_p(A) = \text{Int}_\infty(A) \Rightarrow A = \text{Int}_\infty(A)$

$\Rightarrow A$  es abierto en  $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$

$\therefore$  los abiertos en  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  y  $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$  son los mismos.