

CURSO : MA22A CALCULO EN VARIAS VARIABLES
SEMESTRE VERANO 01
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 3 / 1 / 2002

TIEMPO : 3 horas

CONTROL #1

1.- (Responda 4 partes, la parte f) es obligatoria)

- a) Muestre que $\text{Int } A$ es el mayor conjunto abierto incluido en A .
b) Muestre que un subconjunto cerrado de un conjunto compacto (cerrado y acotado) es un conjunto compacto.

c) Determine \mathbf{a} y \mathbf{b} tal que: $\|x\|_\infty \leq \mathbf{a}\|x\|_p$ y $\|x\|_p \leq \mathbf{b}\|x\|_\infty \quad \forall x \in R^n \quad \forall p > 1$.

(\mathbf{b} depende de n y p).

Concluya que: $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

d) Dadas n funciones $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ de R en R Demuestre que: $\mathbf{I} : R \rightarrow R^n$ definida por $\mathbf{I}(t) = (\mathbf{f}_1(t), \dots, \mathbf{f}_n(t))$ es continua.

e) Se sabe que si $\|\cdot\|$ es una norma cualquiera en R^n , entonces $\|x\|_p = \|Px\|$ es también norma en R^n , donde

P es una matriz invertible de $n \times n$. Demuestre que $\|x\|_e = \left[\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2 \right]^{1/2}$ es una norma en R^2 .

f) Analizar si las siguientes funciones son normas en R^n , en caso afirmativo, demuéstrelas, en caso contrario de un contraejemplo:

i) $\|x\| = \sqrt{\|x\|_\infty^2 + \|x\|_1^2}$

Ind: Asuma que si $p, q, r, s > 0$ entonces $pr + qs \leq \sqrt{(p^2 + q^2)(r^2 + s^2)}$

ii) $\|x\| = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$

iii) $\|x\| = \sum_{i=1}^{n-1} |x_i|$

2.-

a) Analizar la existencia de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ para las siguientes funciones (escoja un de los 2 problemas)

i) $f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

ii) $f(x,y) = \frac{e^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}\right)}}{|y| + e^{\frac{1}{|x|}}}$

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(x^2 + y^2) & \text{Si } x^2 + y^2 > 1 \\ \ln\left(\frac{1 + x^2 + y^2}{3 - x^2 - y^2}\right) & \text{Si } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

- i) Determine el dominio y recorrido de la función.
- ii) Determine y grafique las curvas de nivel.
- iii) Grafique la función en 3-D.

3.- Considere la función de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- a) Estudie la continuidad de la función en todo su dominio.
- b) Determine las derivadas parciales de f donde existan.
- c) Analice la continuidad de las derivadas parciales en $(0,0)$
- d) Analice la diferenciabilidad de f en $(0,0)$

1.

a) Supongamos que $\exists G \subset A / \dot{A} \subset G$ con G abierto

$$\Rightarrow \exists x_0 \in G, x_0 \notin \dot{A} \quad B(x_0, r) \subset A$$

$$\text{Pero } \dot{A} = \{x \in A / \exists r' B(x, r') \subset A\} \xrightarrow{\text{por lo tanto}} \text{---}$$

$\Rightarrow \dot{A}$ es el mayor abierto incluido en A .

b) Sea A compacto, es decir,

$$\forall x \in A \quad \|x\| < M$$

Si $B \subset A$ cerrado, pdq B es acotado.

En efecto.

$$\forall x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow \|x\| < M \Rightarrow B \text{ acotado.}$$

$$c) \|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum |x_{\max}|^p \right)^{1/p} = n^{1/p} |x_{\max}|$$

$$\|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = (|x_{\max}|^p)^{1/p} \leq \left(\sum |x_i|^p \right)^{1/p} \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_p$$

$$\therefore \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$$

Tomando límite $p \rightarrow \infty$

$$\|x\|_\infty \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p \leq \lim_{p \rightarrow \infty} n^{1/p} \|x\|_\infty \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

d) Sean $\phi_i(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas.

pdq $\lambda(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix}$$

En efecto, sabemos que $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\phi_i(t) - \phi_i(t_0)| < \varepsilon_i$

Sea $\varepsilon^* = \max_i \varepsilon_i$

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} \phi_1(t) - \phi_1(t_0) \\ \vdots \\ \phi_n(t) - \phi_n(t_0) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = |\phi_k(t) - \phi_k(t_0)| < \varepsilon^*$$

$\Rightarrow \lambda(t)$ continua.

e) PDQ $\|Px\|_p$ es norma de

1- $0 \leq \|x\|_p < +\infty$

$0 \leq \|Px\| < +\infty \checkmark$

2- $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$

\Leftarrow Sea $x = 0 \Rightarrow Px = 0$ (P es invertible)

$\Rightarrow \|Px\| = 0$

$\Rightarrow \|x\|_p = 0$

\Rightarrow Sea $\|x\|_p = 0 \Rightarrow \|Px\| = 0$

$\Rightarrow Px = 0$ (P invertible $\Rightarrow \ker P = \{0\}$)

$\Rightarrow x = 0$

3- $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_p &= \|P(\lambda x)\| = \|\lambda \cdot Px\| = |\lambda| \|Px\| \\ &= |\lambda| \|x\|_p \end{aligned}$$

4- $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p &= \|Px + Py\| \leq \|Px\| + \|Py\| \\ &= \|x\|_p + \|y\|_p \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|x\|_p$ es norma

$$\|x\|_e = \left(\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2 \right)^{1/2} \text{ es norma en } \mathbb{R}^2$$

Consideremos la norma euclídeana y la matriz P definida por

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ invertible}$$

$$\text{Luego } Px = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1/3 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\|Px\|_2 = \sqrt{\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2}$$

Por lo demostrado anteriormente $\|x\|_e$ es norma en \mathbb{R}^2 .

f) i) $\|x\| = \sqrt{\|x\|_\infty^2 + \|x\|_1^2}$ es norma

1- $0 \leq \|x\| < +\infty$ (directo)

2- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\Rightarrow \|x\| = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\|x\|_\infty^2 + \|x\|_1^2} = 0$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty^2 + \|x\|_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty = \|x\|_1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$\Leftarrow | x = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\|x\|_\infty^2 + \|x\|_1^2} = 0$$

$$\Rightarrow \|x\| = 0$$

$$\begin{aligned} 3- \| \lambda x \| &= \sqrt{\| \lambda x \|_\infty^2 + \| \lambda x \|_1^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \|x\|_\infty^2 + |\lambda|^2 \|x\|_1^2} \\ &= |\lambda| \sqrt{\|x\|_\infty^2 + \|x\|_1^2} = |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4- \|x+y\| &= \sqrt{\|x+y\|_\infty^2 + \|x+y\|_1^2} \leq \sqrt{(\|x\|_\infty + \|y\|_\infty)^2 + (\|x\|_1 + \|y\|_1)^2} \\ &= \sqrt{\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2 + \|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 + 2(\|x\|_\infty \|y\|_\infty + \|x\|_1 \|y\|_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &\leq \|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2 + \|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 + 2\sqrt{(\|x\|_\infty^2 + \|x\|_1^2)(\|y\|_\infty^2 + \|y\|_1^2)} \\ &\leq \left(\sqrt{\|x\|_\infty^2 + \|x\|_1^2} + \sqrt{\|y\|_\infty^2 + \|y\|_1^2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$\Rightarrow \|x\|$ es norma

$$ii) \|x\| = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

No es norma. Sea $x \neq 0$

$$\|2 \cdot x\| = 1 \quad \text{pero } 2 \neq |2| \cdot \|x\|$$

$$|2| \cdot 1$$

$$iii) \|x\| = \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| \quad \text{no es norma.}$$

Consideremos $x^* = (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \neq \vec{0}$

$$\|x^*\| = \sum_{i=1}^{n-1} 0 = 0 \quad \text{pero } x^* \neq \vec{0}$$

2-

a) i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0$

$$\left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| < \left| \frac{x^4}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^4}{x^2 + y^2} \right| = x^2 \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| + y^2 \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| < x^2 + y^2 < \|x\|_2^2 < \delta^2 \epsilon$$

ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty)} \frac{e^{-(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|})}}{|y| + e^{-\frac{1}{|x|}}} = 0$

$$\left| \frac{e^{-\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|y|}}}{|y| + e^{-\frac{1}{|x|}}} \right| \leq \left| \frac{e^{-\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|y|}}}{e^{-\frac{1}{|x|}}} \right| = e^{-\frac{1}{|y|}} \leq e^{-\frac{1}{\|x\|_\infty}} < \epsilon$$

Si $\epsilon \geq 1 \Rightarrow e^{-\frac{1}{\|x\|_\infty}} < \epsilon$ que se cumple obviamente

Si $\epsilon < 1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\|x\|_\infty} < \ln \epsilon$$

$$\frac{1}{\|x\|_\infty} > -\ln \epsilon$$

$$\|x\|_\infty < -\frac{1}{\ln \epsilon} \Rightarrow \delta = -\frac{1}{\ln \epsilon} > 0$$

2-

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(x^2+y^2) & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ \ln\left(\frac{1+x^2+y^2}{3-x^2-y^2}\right) & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

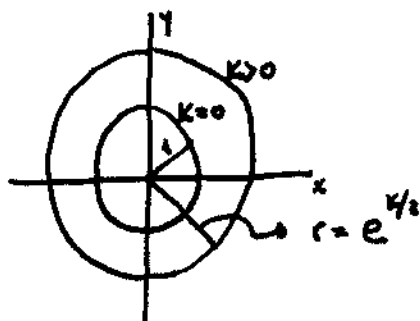
i) Dom $f: \mathbb{R}^2$

Rec $f: [-\ln 3, +\infty)$

ii) Si $x^2+y^2 > 1$

$$\ln(x^2+y^2) = k$$

$$1 < x^2+y^2 = e^k$$



Si $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$

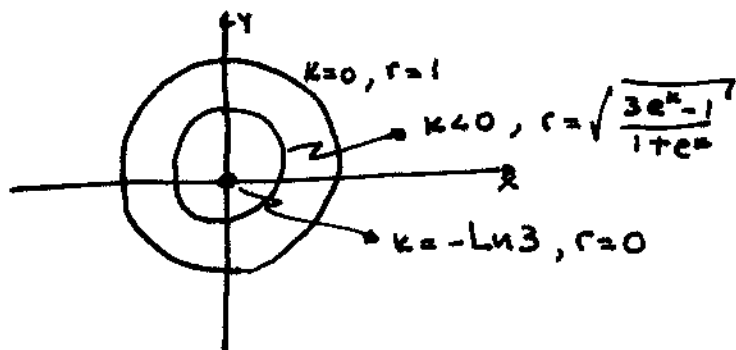
$$\ln\left(\frac{1+x^2+y^2}{3-x^2-y^2}\right) = k$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{3e^k - 1}{1 + e^k} \leq 1$$

$$\frac{1}{3} \leq e^k \leq 1 \Rightarrow -\ln 3 \leq k \leq 0$$

$$\frac{1+x^2+y^2}{3-(x^2+y^2)} = e^k$$

$$x^2+y^2 = \frac{3e^k - 1}{1 + e^k}$$

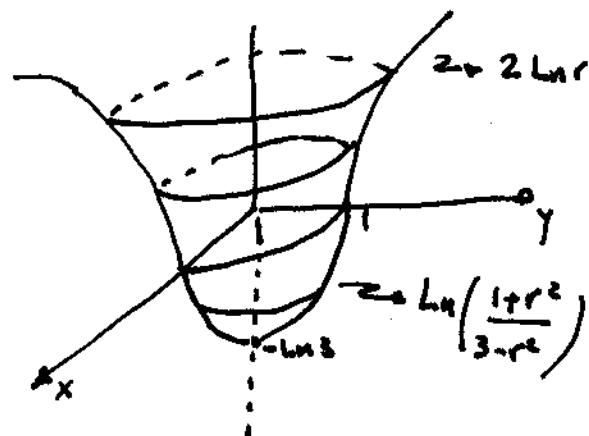
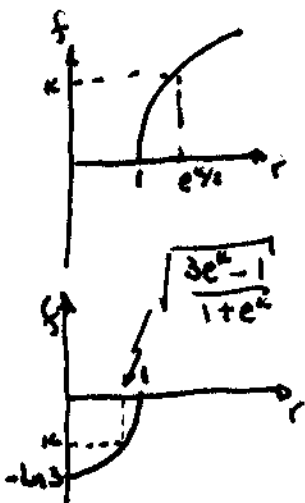


iii) Para $k > 0, r > 1$

$$f = \ln r^2 = 2 \ln r$$

Para $k \leq 0 \Rightarrow r \leq 1$

$$f = \ln\left(\frac{1+r^2}{3-r^2}\right)$$



3-

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) f es continua en $(0,0)$

$$\left| \frac{xy^3}{x^2+y^2} \right| = |xy| \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |xy| < \|\vec{x}\|_\infty^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{3xy^2(x^2+y^2) - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$

$$\left| \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2} \right| < \left| \frac{y^3 \cdot y^2}{y^4} \right| = |y| < \|\vec{x}\|_\infty < \delta = \varepsilon$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(0,0)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{3xy^2(x^2+y^2) - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \right| &= \left| \frac{3x^3y^2 + xy^4}{x^4+y^4+2x^2y^2} \right| \leq \left| \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{y^2(2x^2+y^2)} \right| \leq \left| \frac{x(6x^2+3y^2)}{2x^2+y^2} \right| \\ &\leq |3x| \leq 3\|x\|_{\infty} \leq 3\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

d) Como $f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ es diferenciable en $\vec{0}$.