MA2001-4 Cálculo en Varias Variables 2017
Profesor: Aris Daniilidis
Auxiliares: Pablo López - Nicolás Bitar
Diego Ramírez
Fecha: 19 de Junio del 2017

Auxiliar 11

P1. [**Mínimos Cuadrados**]

- Suponga que se tiene n puntos en el plano como resultado por ejemplo de observar dos variables en un conjunto de individuos, $(x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$. Se desea hallar una función que se ajuste lo *mejor* posible al conjunto de observaciones.
  La función más simple a probar es una línea recta (denominada modelo lineal simple):

$$y = mx + b$$

donde m y b son los parámetros que determinan la recta. Como los puntos no están necesariamente sobre una recta, para cada par de puntos existe un error asociado e_i con $i \in [1, \dots, n]$, tal que:

$$y_i = mx_i + b + e_i, \quad \forall i \in [1, \dots, n]$$

Una manera de determinar m y b es a través del criterio denominado de mínimos cuadrados, que se expresa como el siguiente problema de optimización:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2, \qquad s.a. \quad y_i = mx_i + b + e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

1. Transforme el problema anterior en un problema sin restricciones, determine las incógnitas.
2. Resuélva el problema sin restricciones y pruebe que se trata efectivamente de un mínimo. Es global? Es único?
3. ¿Qué condición deben satisfacer los datos para que el problema anterior siempre tenga solución?

P2. [**Optimización con restriccciones**]

a) Encontrar $x_1, \dots, x_n > 0$ que resuelven

$$\text{máx } f(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} x_i ln(x_i)$$
$$s.a. \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

b) Calcular el valor máximo de : $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y \rangle$$
$$s.a \ \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$$

Deduzca a partir de esto la desigualdad de Cauchy- Schwarz : $\langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

c) En este problema veremos cómo fluye la corriente a través de un circuito a fin de minimizar energía. Una corriente I pasando a través de una resistencia R sufre una pérdida de energía igual a I^2R por segundo. Se sabe que al enfrentarse a una bifurcación, la corriente se divide de forma tal que minimiza la pérdida de energía debido a las resistencias.
Considere un diagrama como el de la figura, donde una corriente I debe pasar a través de dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo. Calcule I_1 e I_2 en función de I,R_1,R_2 tal que la pérdida de energía sea mínima.

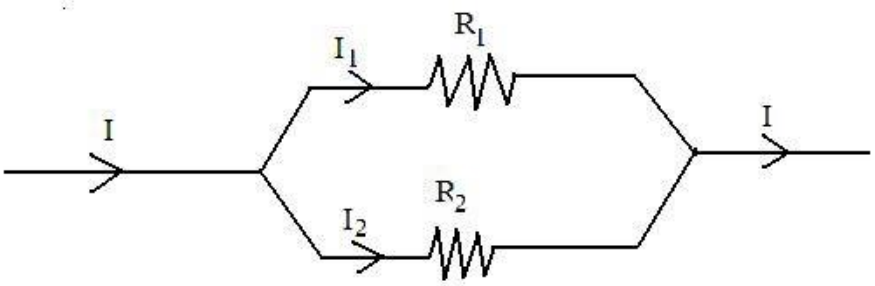

Figura 1: Circuito compuesto por dos resistencias R1 y R2, ambas en paralelo.

P3. [**Aplicaciones de Lagrange**] Encontrar un punto P de coordenadas positivas perteneciente al elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, tal que el plano tangente al elipsoide en P determine con los ejes coordenados un tetrahedro de volumen mínimo.

***. Resumen.**

- **Optimización**

Condición de 1^{er} Orden (Necesaria): Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff en $x_0 \in int(D)$, entonces:

$$Si\, x_0 \text{ mín / máx } local \Rightarrow \nabla f = 0$$

Condición de 2^{do} Orden (Necesaria): Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\bar{x} \in int(D)$, f de clase C^2 Si $\bar{x}$ es mínimo(máximo) entonces $\nabla f = 0$ y H_f es semidefinida positiva(negativa).

Condición de 2^{do} Orden (Suficiente): Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x_0 \in int(D)$ $f \in C^2(V_{x_0})$ entonces:

- $\nabla f = 0 \wedge H_f(x_0)$ def. positivo $\Rightarrow x_0$ mín local estricto
- $\nabla f = 0 \wedge H_f(x_0)$ def. negativo $\Rightarrow x_0$ máx local estricto
- $\nabla f = 0 \wedge H_f(x_0)$ indefinido $\Rightarrow x_0$ punto silla.

¿Dónde buscar óptimos? Dada$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sus óptimos se encuentran en el conjunto:

$$\{x \in int(D) : \nabla f = 0\} \cup \{x \in int(D) : f \text{ no diferenciable en } x\} \cup \partial D$$

- **Funciones Convexas**

Conjunto Convexo: Se dice S conjunto convexo si:

$$\forall x, y \in S, \lambda x + (1-\lambda)y \in S,\ \lambda \in [0,1]$$

Función Convexa: Se dice que una función $f : S \subseteq R^n \to R$ (con S convexo) es una función convexa si $(\forall x, y \in S)(\forall \lambda \in [0,1])$ se cumple:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Análogamente, f se dirá estríctamente convexa si $(\forall x, y \in S)(\forall \lambda \in (0,1))$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Propiedades de funciones convexas a usar: Sea $S \subseteq R^n$ y $f : S \to R$ se tiene:

- Si f posee un mín local $\bar{x}$: f convexa $\Rightarrow \bar{x}$ es mín global de f
- Si f diferenciable y convexa $\Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}) + < \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} >$, $\forall x, \bar{x} \in S$
- Si f diferenciable y convexa : $\bar{x}$ mín global de $f \Leftrightarrow \nabla f = 0$
- Si $f \in C^2(S)$ entonces: f convexa $\Leftrightarrow H_f(x)$ semi def. positiva.
- f es cóncava $\iff$ -f es convexa

Observación: Si una función f convexa, es compuesta con una función g, también convexa(y además creciente) se tiene que fog también es convexa.

- **Multiplicadores de Lagrange.** Sean $f, g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \in C^1$ con $m < n$ y $\bar{x}$ solución del problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_i(x) = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

tal que el conjunto $\{\nabla g_1(\bar{x}), \ldots, \nabla g_m(\bar{x})\}$ es linealmente independiente. Entonces $\exists \ \lambda_1 \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla g_k(\bar{x}) = 0$$

o bien si definimos la función Lagrangeana como

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1 \ldots, \lambda_m) = f(x) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x)$$

$$\text{, entonces:} \quad \nabla \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda_1 \ldots, \lambda_m) = 0$$

- **Otros Teoremas**

Teorema de Weierstrass: Sea $f : K \subseteq R^n \to R$ con f continua y K un compacto. Entonces, f alcanza sus cotas. Es decir:

$$\exists a, b \in K, f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in K$$