Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas — Universidad de Chile

MA2001-1. Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Esteban Quiroz - Valentín Retamal
Obed Ulloa - Donato Vásquez.
Fecha: 05 de Agosto de 2015

Control 3

Lea cuidadosamente las instrucciones, el puntaje correspondiente se encuentra indicado entre paréntesis.

P1 **a)** (3.0)

i) Probar que el sistema:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 9 \\ xy+z &= 0 \end{aligned}$$

Define implícitamente $x = x(z)$ y $y = y(z)$ en el entorno de $(x, y, z) = (2, 1, -2)$.

ii) Si $\alpha(z) = (x(z), y(z), z)$ denota la curva definida por el sistema anterior, calcular la recta tangente y el plano normal a α en $z = -2$.

b) (3.0)

i) Probar que la ecuación $xy + x^2 - e^y + z^2 = 0$ define una función $z = z(x, y)$ en torno al punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

ii) Determinar la expansión de Taylor de segundo orden para $z(x, y)$ en torno al punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

P2 Suponga que tiene n puntos en el plano como por ejemplo de observar dos variables en un conjunto de individuos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Se desea hallar una función que se ajuste lo "mejor" posible al conjunto de observaciones.

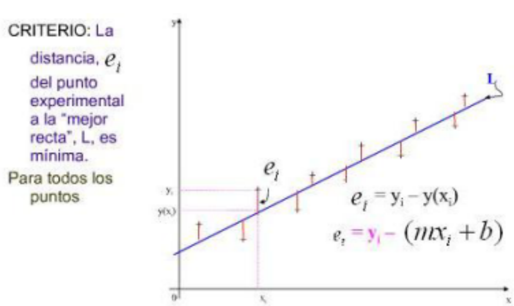
a) (3.0) La función más simple a probar es una línea recta (denominada modelo lineal simple):

$$y = mx + b$$

donde m y b son los parámetros que determinan la recta.

Como los puntos no están necesariamente sobre una recta, para cada par de puntos existe un error asociado, e_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que:

$$y_i = mx_i + b + e_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$



Los errores o residuos pueden ser positivos, negativos o nulos.

Una manera de determinar m y b es a través del criterio denominado de mínimos cuadrados, que se expresa como el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} (PMC) & \text{mín} & \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \\ & \text{s.a.} & y_i = mx_i + b + e_i \;\; i = 1, \ldots, n \end{array}$$

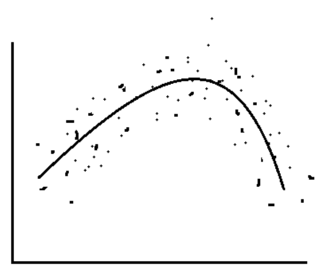
Se pide

i) Transforme el problema anterior en un problema sin restrricciones. ¿Cuáles son las incógnitas?

ii) Resuélva el problema sin restricciones y pruebe que se trata de efectivamente un mínimo. ¿Es global? ¿Es único?

iii) ¿Qué condición impondría sobre los datos para que el problema anterior siempre tenga solución?

b) Supong que los datos no quedan bien representados por una línea recta (segundo gráfico de la figura):



Entonces puede sugerir otro modelo lineal que relacione mejor los datos, por ejemplo una parábola:

$$y = a + bx + cx^2$$

Nuevamente se necesita determinar los coeficientes a, b y c por medio del criterio de mínimos cuadrados. Se pide

i) Formular el problema de optimización asociado, sin restricciones ybajo el siguiente formato:

$$\begin{array}{lll} (PMC) & \text{mín} & \|Q\vec{x} - \vec{d}\|_2^2 \\ & \text{s.a.} & \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Donde $Q \in \mathcal{M}_{n\times 3}(\mathbb{R}), \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$.

Determine explícitamente $Q, \vec{x}$ y $\vec{d}$.

ii) Resuelva matricialmente el problema anterior y dé condiciones para la existencia de la solución.

P3 **a)** (3.0) Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{array}{l} \text{mín}\, x^t A x - b^t x \\ \text{s.a. } x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$.

i) Encuentre condiciones sobre la matriz A para que la función objetivo sea convexa.

ii) A partir de la ahora considere $x \in \mathbb{R}^2$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y de una fórmula para x_1 usando metodo del gradiente partiendo en x_0; luego de una expresión para x_1 con el metodo de newton partiendo en x_0. ¿Será alguno de los puntos obtenidos tras la primera iteración el óptimo? Justifique.

b) (2.0) Determine los máximos y minimos globales de

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy$$

sujeto a que $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1$. Justifique su respuesta.

c) (1.0) Probar que la siguiente función es convexa

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln(e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n})$$

Bonus Para que el puntaje de la pregunta bonus sea efectivo usted deberá promediar al menos 4.0 en las otras tres preguntas. El puntaje de bonus se sumará a la nota de control.

a) (0.3) Calcular

$$\iint_D e^{y^3} dA$$

donde $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$.

b) (0.4) Calcular el volumen de un solido en el primer octante limitado inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ y por los planos $y = x$ e $y = 0$. Se le pide:

i) Esbozar la región

ii) Escribir el problema en coordenadas cartesianas.

iii) Resolver en coordeandas polares.

c) (0.5) Considere la región $R \in \mathbb{R}^2$ en el pimer cuadrante donde los puntos son tales que $1 \leq xy \leq 4$ y $x \leq y \leq 3x$.

i) Dibujar la región y calcular los puntos de corte.

ii) Calcular en coordenadas cartesianas

$$\iint_R (x^2 + y^2) dxdy$$

iii) Mediante un "cambio de variables astuto" recalcular la integral anterior.