MA2001-4 Cálculo en Varias Variables 2017
Profesor: Aris Daniilidis
Auxiliares: Pablo López - Nicolás Bitar
Diego Ramírez
Fecha: 24 de Marzo del 2017

Auxiliar 2

P1. [Equivalencia de Normas]

a) Sea N_1, N_2 normas en E tales que :

$$mN_1(x) \leq N_2(x) \leq MN_1(x), \quad \forall x \in E$$

Entonces N_1 y N_2 definen los mismos conjuntos abiertos. ($\tau_1 = \tau_2$)

b) Considere $E = \mathcal{C}([0,1])$ y las normas $\|f\|_1, \|f\|_\infty$.
Demuestre que

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$$

y que, por lo tanto,

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f.$$

y

$$B_\infty(0,1) \subset B_1(0,1).$$

Pero no se tiene la otra inclusión, para ello estudie la siguiente función:

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n - 2n^3 t & \text{si } t \in \left[0, \dfrac{1}{n^2}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left(\dfrac{1}{n^2}, 1\right] \end{cases}$$

P2. [Un poco de abiertos y cerrados]

a) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $M = Graph(f) \subset \mathbb{R}^2$ su grafo.
Pruebe que M es cerrado y deduzca que $\mathcal{U} = \{(x,y) \ : \ y \neq x^2\}$ es abierto.

b) Demuestre que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado o abierto, entonces $Int(Fr(A)) = \emptyset$, es esto cierto para cualquier conjunto A? Justifique.
** Se define $Fr(A)$ como $Adh(A) \bigcap Int(A)^c$.

P3. [Adherencias e interiores, léase más abiertos y cerrados] Muestre que:

- $\overline{(0,1)} = [0,1]$.
- $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.
- Dado $x \in E$ y $r > 0$, $\overline{B(x,r)} = \overline{(B)}(x,r)$.

Se tiene que $\overline{int(A)} \subset int(\bar{A})$? ¿Y la recíproca?

P4. [Espacios de Banach.] Se define $\ell^\infty(\mathbb{N})$ como el espacio de las sucesiones acotadas, dotado de la norma uniforme $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ donde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Desmostrar que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es un espacio de Banach.