Francisco Fernández

Pautita

P6

La ecuación:

$$(\alpha+2)x^2+(\alpha+2)y^2+2\alpha xy=1$$

Se puede reescribir como:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\alpha+2) & \alpha \\ \alpha & (\alpha+2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$$

Queremos realizar el cambio de variables $\vec{u}=P^t\vec{x}$, donde $A=PDP^t$.
Para ello calculemos los valores propios de A:

$$\begin{aligned} 0 &= det(A-\lambda I) \\ &= ((\alpha+2)-\lambda)^2-\alpha^2 \\ &= (\alpha+2)^2-\alpha^2-2(\alpha+2)\lambda+\lambda^2 \\ &= \lambda^2-2(\alpha+2)\lambda+(4\alpha+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= (\alpha+2)\pm\sqrt{(\alpha+2)^2-(4\alpha+4)} \\ &= (\alpha+2)\pm\sqrt{\alpha^2+4\alpha+4-(4\alpha+4)} \\ &= (\alpha+2)\pm|\alpha| \\ \lambda &\in \{2, 2+2\alpha\} \end{aligned}$$

Con esto conseguimos la matriz:

$$D=\begin{pmatrix} 2+2\alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego ocupando el cambio de variable $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\vec{u}=P^t\vec{x}$:

$$1=\vec{x}^tA\vec{x}=\vec{x}^tPDP^t\vec{x}=\vec{u}^tD\vec{u}\implies \quad 1=(2+2\alpha)u^2+2v^2$$

Lo cual nos da tres casos: $(2+2\alpha)>0, =0, <0$. O sea cuando $\alpha>-1, =-1, <-1$.

Caso 1: $\alpha>-1\implies(2+2\alpha)>0$.
En este se obtiene una elipse en el nuevo sistema de referencia con semi ejes $a=\sqrt{(2+2\alpha)^{-1}}$ y $b=\sqrt{2^{-1}}$:

$$1=(2+2\alpha)u^2+2v^2=\left(\frac{u}{\sqrt{(2+2\alpha)^{-1}}}\right)^2+\left(\frac{v}{\sqrt{2^{-1}}}\right)^2=\left(\frac{u}{a}\right)^2+\left(\frac{v}{b}\right)^2$$

Caso 2: $\alpha<-1\implies-(2+2\alpha)>0$.
Nos da una hipérbole en el nuevo sistema de referencia:

$$1=2v^2-(-2-2\alpha)u^2$$

Caso 3: $\alpha=-1\implies(2+2\alpha)=0$. Lo cual es un caso degenerado pues:

$$1=2v^2$$

No es una cónica si no que dos rectas:

$$v=1/\sqrt{2} \text{ y } v=-1/\sqrt{2}.$$