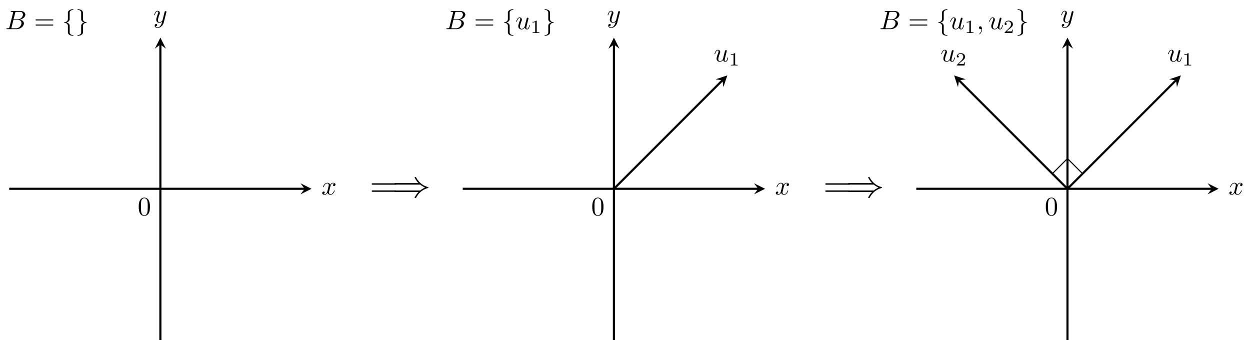
Francisco Fernández

Gram-Schmidt.

El Método de Gram-schmidt se utiliza para conseguir una base (conjunto generador y l.i) ortonormal (ortogonal y de norma 1) B de un espacio vectorial V.
El método es iterativo pasando de un conjunto ortonormal de n elementos $\{u_1, ..., u_n\}$ a otro conjunto ortonormal de $n+1$ elementos $\{u_1, ..., u_n, u_{n+1}\}$:



La gracia de esta construcción es que cada vez se tiene un conjunto de vectores más grande, que es linealmente independiente (todos los elementos de un conjunto ortogonales entre sí implica que el conjunto es l.i.).
La idea es repetir el algoritmo, añadiendo direcciones que falten, hasta que B genere todo el espacio V. Así se termina con un conjunto B que es base (l.i. y generador) y que es ortonormal.

Resumen Ejecución del Algoritmo

Se tiene el conjunto ortonormal $B = \{u_1, ..., u_n\} \subseteq V$ (usualmente vacío) y una dirección d que falta por generar en el espacio vectorial.

1. Se calcula la componente de d ortogonal a $B = \{u_1, ..., u_n\}$:

$$d_{ort} = d - \langle d, u_1\rangle u_1 - ... - \langle d, u_n\rangle u_n$$

2. Se la normaliza:

$$u_{n+1} = \frac{1}{\|d_{ort}\|} d_{ort}$$

3. Se agrega u_{n+1} al conjunto B.
Si falta alguna dirección d por generar (es decir $d \in V$ y $d \notin \langle B\rangle$) se vuelve al paso 1.

Obs 1: Si por error se ingresa una dirección d que ya está generada por B el algoritmo entregará $u_{n+1} = 0$. En este caso, simplemente ignora esta iteración e intenta de nuevo con otro d que no esté generado por B (si es que existe, puede que B ya genere).

Obs 2: El algoritmo no indica cuando se a generado todo el espacio vectorial ($\langle B\rangle = V$) por lo que lo usual es continuar hasta que B sea de tamaño igual a $dim(V)$, o hasta que se sabe que no quedan vectores por generar. Un caso típico de esto último es cuando ya generamos todos los vectores de un generador $\{v_1, ..., v_n\}$ de V.

Obs 3: Si B es vacío, $d_{ort} = d$. Luego la primera iteración sería sólo normalizar d y agregarlo a B.

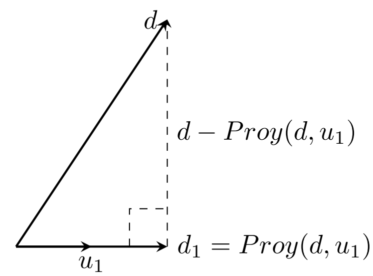
Explicación y demostración del algoritmo

Partimos con el conjunto ortonormal $B = \{u_1, ..., u_n\}$. Esto significa que todos los u_i son ortogonales entre sí ($\langle u_i, u_j\rangle$=0 para $j \neq i$) y todos son de norma 1 ($\|u_i\| = 1$). Lo típico es no tener nada (:( ) y partir con $B = \varnothing$.
También se tiene una dirección $d \in V$ que no es generada por B ($d \notin \langle B\rangle$). Típicamente hay que encontrarla o proviene de otro generador dado de V.

Buscamos u_{n+1} tal que $\{u_1, ..., u_n, u_{n+1}\}$ genere la dirección d. Una primera idea es tomar $u_{n+1} = d$ pero el problema es que no necesariamente es ortogonal a los otros u_i ni necesariamente es de norma 1.
Primero solucionemos el problema de la ortogonalidad.
Notemos que si a d le restamos su proyección con u_1 se consigue un d_1 ortogonal a u_1:

$$d_1 = d - Proy(d, u_1) = d - \left\langle d, \frac{u_1}{\|u_1\|} \right\rangle \frac{u_1}{\|u_1\|} = d - \langle d, u_1\rangle u_1$$

$$\langle d_1, u_1\rangle = \langle d - \langle d, u_1\rangle u_1, u_1\rangle = \langle d, u_1\rangle - \langle d, u_1\rangle\langle u_1, u_1\rangle = \langle d, u_1\rangle - \langle d, u_1\rangle 1 = 0$$



Así d_1 es ortogonal a u_1 y $\{u_1, d_1\}$ generan la dirección d ($d = d_1 + \langle d, u_1\rangle u_1$).
Ahora, necesitamos que también sea ortogonal con u_2. Siguiendo la misma idea, le restamos su proyección con u_2 para obtener d_2 ortogonal a u_2:

$$d_2 = d - Proy(d, u_1) - Proy(d, u_2) = d - \langle d, u_1\rangle u_1 - \langle d, u_2\rangle u_2$$

$$\langle d - \langle d, u_1\rangle u_1 - \langle d, u_2\rangle u_2, u_1\rangle = \langle d, u_1\rangle - \langle d, u_1\rangle\langle u_1, u_1\rangle - \langle d, u_2\rangle\langle u_2, u_1\rangle = \langle d, u_1\rangle - \langle d, u_1\rangle 1 - \langle d, u_2\rangle 0 = 0$$

$$\langle d - \langle d, u_1\rangle u_1 - \langle d, u_2\rangle u_2, u_2\rangle = \langle d, u_2\rangle - \langle d, u_1\rangle\langle u_1, u_2\rangle - \langle d, u_2\rangle\langle u_2, u_2\rangle = \langle d, u_2\rangle - \langle d, u_1\rangle 0 - \langle d, u_2\rangle 1 = 0$$

Así d_2 es ortogonal a u_1 y a u_2, y $\{u_1, u_2, d\}$ genera a d ($d = d_2 + \langle d, u_1\rangle u_1 + \langle d, u_2\rangle u_2$).

Es fácil ver que así $d_n = d - \langle d, u_1\rangle u_1 - ... - \langle d, u_n\rangle u_n$ va a ser ortogonal a $u_1, u_2, .., u_n$ y que $\{u_1, u_2, ..., u_n, d_n\}$ genera la dirección d. Con todo esto Sólo falta que d_n sea de norma 1, lo cual se soluciona fácil ponderándolo por $\|d_n\|^{-1}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{\|d_n\|} d_n$$

Con esto $B' = \{u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}\}$ es ortonormal (ortogonales entre sí y todos de norma 1) y genera d.