Francisco Fernández

Coordenadas con respecto a una base.

Pensemos en un espacio vectorial V y en una base $B = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ de este.
Como B es base, todo $\vec{x}$ en V se puede escribir como sumas y ponderaciones de elementos en B:

$$\vec{x} = \beta_1 \cdot \vec{b}_1 + \beta_2 \cdot \vec{b}_2 + ... + \beta_n \cdot \vec{b}_n = \sum_i \beta_i \vec{b}_i$$

A estos coeficientes β_i se les suele llamar las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B.
Comúnmente se las suele anotar en un sólo vector:

$$(\vec{x})_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Obs: Las coordenadas con respecto a una base son únicas. Es decir para un x fijo y base B fija, los β_i son únicos.

Ejemplo: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $V = \mathbb{R}^2$ con la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = (4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Luego las coordenadas de $\vec{x}$ en la base B son: $(\vec{v})_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Otro ejemplo: $V = \mathbb{R}^2$ con la base canónica $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir las coordenadas típicas son las coordenadas con respecto a la base canónica.

Matriz Representante.

Consideremos dos espacios vectoriales U, V y una transformación lineal entre ellos $T : U \longrightarrow V$.
Consideremos $A = \{\vec{a}_1, .., \vec{a}_m\}$ una base de U y $B = \{\vec{b}_1, .., \vec{b}_n\}$ una base de V.

La matriz representante de T con respecto a la base de partida A y base de llegada B, es la matriz M tal que al multiplicarla por las coordenadas de un $\vec{x}$ con respecto a la base A, entrega las coordenadas de $T(\vec{x})$ con respecto a la base B.

En resumen, M es la matriz tal que para todo $\vec{x}$ en U:

$$M(\vec{x})_A = (T(\vec{x}))_B.$$

Es decir, manda $\vec{x}$ escrito en la base de partida y devuelve $T(\vec{x})$ en la base de llegada.

¿Cómo la cálculo?

Sabemos que $T(\vec{a}_j)$ está en V y que B es base de V. Luego, existen coeficientes $m_{i,j}$ tales que $T(\vec{a}_j)$ se escribe como sumas ponderadas de los elementos $\vec{b}_i$:

$$T(\vec{a}_j) = m_{1,j}\vec{b}_1 + m_{2,j}\vec{b}_2 + ... + m_{n,j}\vec{b}_n = \sum_i m_{i,j}\vec{b}_i$$

Es decir, $m_{i,j}$ son las coordenadas de $T(\vec{a}_j)$ en la base B:

$$(T(\vec{a}_j))_B = \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix}$$

Teniendo estos coeficientes, la matriz representante de T con respecto a A y B, no es nada más que es la matriz formada por los coeficientes $m_{i,j}$:

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & ... & m_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & ... & m_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T(\vec{a}_1))_B & ... & (T(\vec{a}_m))_B \end{pmatrix}$$

Los casos chicos casi siempre se pueden resolver "al ojo", como los dos ejemplos en **Coordenadas con respecto a una base**. Para casos más difíciles, puede servir escribir los sistemas como una ecuaciones matriciales:

$$T(\vec{a}_j) = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & ... & \vec{b}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $T(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz representante de T en las bases A y B es:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración: ¿Por qué funciona esta matriz?

Buscamos formar el vector de coordenadas $(T(\vec{x}))_B$ como multiplicación de la matriz M por el vector de coordenadas $(\vec{x})_A$.
Consideremos las coordenadas de $\vec{x}$ con respecto a A y las de ():

$$(x)_A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \qquad (T(x))_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Por definición, esto significa que:

$$\begin{aligned} \vec{x} = &\quad \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + ... + \alpha_m \cdot \vec{a}_m &= \sum_j \alpha_j \vec{a}_j \quad (1) \\ T(\vec{x}) = &\quad \beta_1 \cdot \vec{b}_1 + \beta_2 \cdot \vec{b}_2 + ... + \beta_n \cdot \vec{b}_n &= \sum_i \beta_i \vec{b}_i \quad (2) \end{aligned}$$

Aplicando T a (1) y usando que T es lineal, se llega a que:

$$T(\vec{x}) = T(\sum_j \alpha_j \vec{a}_j) = \sum_j \alpha_j T(\vec{a}_j)$$

Sabemos también que los $m_{i,j}$ son las coordenadas de $T(a_j)$ en la base B:

$$T(\vec{a}_j) = m_{1,j}\vec{b}_1 + m_{2,j}\vec{b}_2 + ... + m_{n,j}\vec{b}_n = \sum_i m_{i,j}\vec{b}_i$$

Reemplazando en la ecuación anterior, tenemos :

$$T(\vec{x}) = \sum_j \alpha_j T(\vec{a}_j) = \sum_j \alpha_j \sum_i m_{i,j}\vec{b}_i$$

Reordenando y dando vuelta las sumas:

$$T(\vec{x}) = \sum_j \alpha_j \sum_i m_{i,j}\vec{b}_i = \sum_j \sum_i \alpha_j m_{i,j}\vec{b}_i = \sum_i \sum_j \alpha_j m_{i,j}\vec{b}_i = \sum_i \left(\sum_j m_{i,j}\alpha_j \right) \vec{b}_i \quad (3)$$

Donde $\left(\sum_j m_{i,j}\alpha_j \right)$ es la fórmula para el término i de la multiplicación de M con el vector $(\vec{x})_A$.

Luego, como la descomposición en términos de la base es única, tendremos para todo i que:

$$\beta_i = \left(\sum_j m_{i,j}\alpha_j \right)$$

Es decir, el vector $(T(\vec{x}))_B$ que buscamos es $(T(\vec{x}))_B = M(\vec{x})_A$ //

Obs: Esto último puede verse más fácil restando (2) con (3) y ocupando que la base B es l.i.:

$$\sum_i \left(\beta_i - \sum_j m_{i,j}\alpha_j \right) \vec{b}_i = 0 \Longrightarrow \beta_i = \sum_j m_{i,j}\alpha_j \text{ para todo i.}$$

Matriz de cambio de base.

Una matriz de cambio de base es una matriz que al multiplicar las coordenadas de $\vec{x}$ en una base A, entrega las coordenadas de $\vec{x}$ en otra base B.

Dicho de otro modo, buscamos M tal que para todo $\vec{x}$ en V, $M(\vec{x})_A = (\vec{x})_B$.

Si se fijan, es lo mismo que cumplía la matriz representante de una transformación T salvo que ahora buscamos las coordenadas de $\vec{x}$ y no de $T(\vec{x})$.

¿Cómo solucionamos esto?

Bueno, miremos que pasa si le tomamos matriz representante a la transformación lineal que no hace nada:

$$I : V \longrightarrow V,\ I(\vec{x}) = \vec{x} \text{ para todo } \vec{x} \text{ en } V.$$

Tendremos que M cumple $M(\vec{x})_A = (I(\vec{x}))_B$. Pero como $I(\vec{x}) = \vec{x}$, nos da lo que buscamos:

$$M(\vec{x})_A = (\vec{x})_B$$

Por lo tanto la matriz de cambio de base no será nada más que la matriz formada por los $m_{i,j}$ que cumplan:

$$\vec{a}_j = m_{1,j}\vec{b}_1 + m_{2,j}\vec{b}_2 + ... + m_{n,j}\vec{b}_n = \sum_i m_{i,j}\vec{b}_i$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^2$ de la base $A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz de cambio de la base A a la B es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$