MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 15 : Complejos y Polinomios

29 de julio del 2017

Recordemos:

- Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ dotado de las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} z + w &= (z_1 + w_1, z_2 + w_2) \\ z \cdot w &= (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + w_1 z_2) \end{aligned}$$

- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo.
- Sea $R = \{(z_1, 0) \in \mathbb{C} : z_1 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$, entonces $(R, +, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- Usualmente anotaremos los $(a, b) \in \mathbb{C}$ como $a + bi$. Donde además $i^2 = -1$.
- Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos la parte real y la parte imaginaria respectivamente como:

$$\mathbb{R}\text{e}(z) = a \qquad \mathbb{I}\text{m}(z) = b$$

- Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:
  1. $\mathbb{R}\text{e}(z_1 + z_2) = \mathbb{R}\text{e}(z_1) + \mathbb{R}\text{e}(z_2)$.
  2. $\mathbb{I}\text{m}(z_1 + z_2) = \mathbb{I}\text{m}(z_1) + \mathbb{I}\text{m}(z_2)$.
  3. $\mathbb{R}\text{e}(\lambda z) = \lambda \mathbb{R}\text{e}(z)$.
  4. $\mathbb{I}\text{m}(\lambda z) = \lambda \mathbb{I}\text{m}(z)$.
  5. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow [\mathbb{R}\text{e}(z_1) = \mathbb{R}\text{e}(z_2) \wedge \mathbb{I}\text{m}(z_1) = \mathbb{I}\text{m}(z_2)]$
- Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos el conjugado de z como:

$$\overline{z} = a - bi$$

- Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces:
  1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$.
  2. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Si $w \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
  3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$.
  4. $\overline{\overline{z}} = z$.
  5. $\mathbb{R}\text{e}(z) = \mathbb{R}\text{e}(\overline{z})$ y $\mathbb{I}\text{m}(z) = -\mathbb{I}\text{m}(\overline{z})$.
  6. $\mathbb{R}\text{e}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $\mathbb{I}\text{m}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
  7. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
- Sea $z = a + bi$. Definimos el módulo como:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces:
  1. $|z| = |\overline{z}|$ y $z = 0 \iff |z| = 0$.
  2. $|\mathbb{R}\text{e}(z)| \leq |z|$ y $|\mathbb{I}\text{m}(z)| \leq |z|$.
  3. $|zw| = |z||w|$ y $|z + w| \leq |z| + |w|$.
  4. Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
  5. Si $w \neq 0$, entonces $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.
- Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos $e^{i\theta}$ como:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

- Sea $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, entonces:
  1. $|e^{i\theta}| = 1$.
  2. $\overline{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$.
  3. $e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta + \varphi)}$.
  4. $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$
- $\arg(z)$ es el ángulo de z con el eje real. Se acostumbra a escoger un ángulo en el rango $(-\pi, \pi]$.
- **Forma Polar:** $z = |z| e^{i \arg(z)}$.
- Si $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$, entonces existe algún $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \varphi + 2k\pi$.
- Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raiz n-ésima de la unidad si $z^n = 1$.
- Las raices n-ésimas de la unidad son de la forma $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
- Sea $z, w \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raiz n-ésima de w si $w^n = 1$.
- Las raices n-ésimas de $z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ son de la forma $\sqrt[n]{R} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
- Sea $n \geq 2$. La suma de las n raíces n-ésimas de la unidad vale 0.

- Consideraremos a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ como el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un polinomio es una función $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ de la forma:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes en $\mathbb{K}$ a las que llamaremos coeficientes.

- Al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ se le denota $\mathbb{K}[x]$.

- Sean $p, q \in \mathbb{K}[x]$.

$$p = q \iff \text{Los coeficientes de } p \text{ y } q \text{ son iguales.}$$

- Sea $p \in \mathbb{K}[x]$. Definimos $\text{gr}(p)$ (el grado) como el k más grande tal que $a_k \neq 0$. Si $p \equiv 0$, diremos que $\text{gr}(p) = -\infty$.

- Diremos que $p \in \mathbb{K}[x]$ es mónico si el coeficiente asociado a $x^{\text{gr}(p)}$ es 1.

- Sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ definimos:

  1. $(p+q)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$
  2. $(pq)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k$

  Estas operaciones verifican:

  1. $\text{gr}(p+q) \leq \text{máx}\{\text{gr}(p), \text{gr}(q)\}$.
  2. $\text{gr}(pq) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$.

- $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad, que no posee divisores del 0.

- En $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$, los únicos elementos con inverso para $\cdot$ son los polinomios de grado 0.

- Sean $p, d \in \mathbb{K}[x]$ con $d \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tal que:

  1. $p = qd + r$.
  2. $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$.

  A r lo llamaremos resto. Si $r \equiv 0$, diremos que d divide a p y lo denotaremos por $d|p$.

- **Teorema del Resto:** Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}$. El resto de dividir p por el polinomio $(x - c)$ es $p(c)$.

- Diremos que $c \in \mathbb{K}$ es una raíz de $p \in \mathbb{K}[x]$ si $p(c) = 0$.

- Si $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son raíces distintas de p, entonces:

$$(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_k) | p(x)$$

- Sea $n \geq 1$. Si $p \in \mathbb{K}[x]$ es tal que $\text{gr}(p) = n$, entonces p posee a lo más n raíces distintas.

- Sea $n \geq 1$ y $p, q \in \mathbb{K}[x]$ tales que $\text{gr}(p) \leq n$ y $\text{gr}(q) \leq n$. Si p y q coinciden en $n+1$ puntos distintos, entonces son iguales.

- **Teorema Fundamental del Álgebra:**
  Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces p posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces existen $\alpha, c_1, \ldots c_m \in \mathbb{C}$ y $l_1, \cdots l_m \in \mathbb{N}$ tales que:

$$p(x) = \alpha (x - c_1)^{l_1} \ldots (x - c_m)^{l_m}$$

- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ y sea $z \in \mathbb{C}$ una raiz de p. Entonces $\overline{z}$ es una raiz de p.

- Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces existen valores $\alpha, c_1, \ldots, c_m, a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s \in \mathbb{R}$ tales que:

$$p \equiv \alpha (x - c_1) \ldots (x - c_m)(x^2 + a_1 x + b_1) \ldots (x^2 + a_s x + b_s)$$

- **Teorema de la Raíz Racional:** Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Si r y s son primos relativos tal que $\frac{r}{s}$ es una raíz de p, entonces:

$$r | a_0 \quad \wedge \quad s | a_n$$

- Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Entonces toda raíz racional de p es entera y divide a a_0.

P1. **[Casquete unitario]**
Sea:

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

a) Demuestre que $(S, \cdot)$ es un subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

b) Para $z \in S$ y $z \neq 1$ definimos:

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

Demuestre que w es un imaginario puro, es decir que $\mathbb{R}\text{e}(w) = 0$.

c) Sea $z \in S$ y $z \neq -1$. Demuestre que:

$$\frac{1+z}{1+\overline{z}} = z$$

d) Sea $z \in S$, y $z \neq -1$. Calcule:

$$\mathbb{I}\text{m}\left(\frac{z}{(1+z)^2}\right)$$

P2. [**Forma Cartesiana**]

a) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R}$$

b) Sean $M, N \in \mathbb{N}$ tal que existen $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ que verifican $M = a^2 + b^2$ y $N = c^2 + d^2$. Demuestre que existen $p, q \in \mathbb{N}$ tal que $MN = p^2 + q^2$. En otras palabras, piden probar que si dos enteros se pueden escribir como la suma de dos cuadrados, entonces su producto también.
Hint: Le puede ser útil trabajar la siguiente expresión $|(a+ib)(c+id)|^2$.

P3. [**Fórmula de Machin**]
A partir del producto $(1+i)(5-i)^4$ pruebe que $\pi = 16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.

P4. [**Raíces**]

a) Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1.

b) Encuentre los $z \in \mathbb{C}$ que verifican:

$$z^4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

c) Calcule $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Hint: Utilice las raíces quintas de la unidad de manera adecuada.

P5. [**Sumas con raíces de la unidad**]
Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:

$$w_0 w_1 + w_1 w_2 + \ldots + w_{n-2} w_{n-1} + w_{n-1} w_0 = 0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ se tiene que $\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$.

c) Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Calcule $\sum_{j=0}^{n-1} (z + w_j)^n$.

P6. [**Más del casquete unitario**]
Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios (es decir $|z_1| = |z_2| = 1$) tales que:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -u, \quad u \in \mathbb{C} \\ z_1 z_2 &= v, \quad v \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

a) Pruebe que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.

b) Pruebe que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$.

c) Pruebe que $u = \overline{u}v$.

d) Si los ángulos de la forma polar de u y v, son φ y θ respectivamente. Utilice *c*) para demostrar que:

$$\theta = 2\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

P7. [Centroide]
El centroide G de un triangulo T es la intersección de sus medianas. Si el triangulo T tiene vertices $a, b, c \in \mathbb{C}$, un hecho conocido (no lo demuestre) es que:

$$G = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

Suponga ahora que en los lados de T construimos tres triángulos similares de forma arbitraria. Esto logra construir un nuevo triangulo de vertices $p, q, r \in \mathbb{C}$ como indica la figura. Demuestre que el centroide de este nuevo triangulo coincide con el centroide del triangulo original.

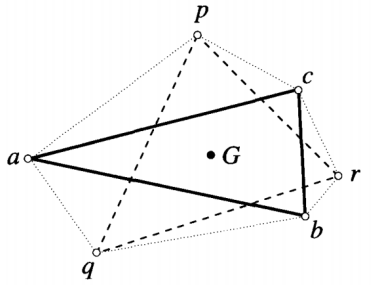

Figura 1: La situación descrita en la P4.

P8. [Raíces cúbicas de la unidad]

a) Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tales que $|w_1| = |w_2| = 1$ y $w_1 + w_2 = -1$.
(i) Pruebe que $w_1 = \overline{w_2}$.
(ii) Muestre que $w_0 = 1$, w_1 y w_2 son las raíces cúbicas de la unidad.

b) Sean $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_0| = |z_1| = |z_2| = 1$ y $z_0 + z_1 + z_2 = 0$. Demuestre que $\exists \theta \in \mathbb{R}$, tal que $z_k = w_k e^{i\theta}$, $k = 0, 1, 2$, donde w_k son los complejos de la parte anterior.

P9. [Raíces de la unidad]
Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ la raíces n-ésimas de la unidad ordenadas segun argumento creciente.

a) Demuestre la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{w_j^k} w_l^k = \begin{cases} n & \text{si } j = l \\ 0 & \text{si } j \neq l \end{cases}$$

b) Sea w una raíz cúbica de la unidad con $w \neq 1$, demuestre que:

$$(1 + w)^3 + (1 + w^2)^9 + (1 + w^3)^6 = 62$$

P10. [División y cancelabilidad de Polinomios]

a) Considere $p, d \in \mathbb{R}[x]$

$$p(x) = 4x^4 - 2x^3 - 3$$
$$d(x) = 2x^2 - 3$$

Encuentre $q, r \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$ con $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$.

b) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $(x-1)|(x^n-1)$.

c) Sea $p(x) = x^5 + ax^2 + b$ y $q(x) = x^3 + cx + 1$. Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para que $q|p$.

d) Sean $p, q, r \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(q-r) = q(p-r)$ y $\text{gr}(r) \geq 0$. Demuestre que $p = q$.

P11. [**Coeficientes**]

a) Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{17} en el polinomio $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

b) Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{12} en el polinomio $(1 + x^2 + x^5 + x^7)^{25}$.

c) Pruebe que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Para esto compare los coeficientes de los polinomios $(1+x)^{2n}$ y $(1+x)^n(1+x)^n$ de manera adecuada.

P12. [**Composición**]

a) Sean $p, q \in \mathbb{C}[x]$ tales que $\text{gr}(p) = n$ y $\text{gr}(q) = m$. Demuestre que $p \circ q$ es un polinomio y calcule $\text{gr}(p \circ q)$.

b) Encuentre todos los $p \in \mathbb{C}[x]$ tales que:

$$p(x^2) = (x^2+1)p(x) \qquad p(p(x)) = p(x)$$

Hint: Puede ser útil encontrar $\text{gr}(p)$ *antes que* p.

P13. [**La igualdad es por coordenadas**]

a) Sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2+f) + (e+f)x + (a-d)x^4 + (2a+c)x^5 + (a+b)x^7 \\ q(x) &= 3 + (f+2)x + (a+b+c+d)x^3 + (b+c+1)x^4 + bx^5 \end{aligned}$$

Determine los valores de $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que $p = q$. Escriba el polinomio resultante.

b) Sea $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Se define $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$q(x) = p(ix)$$

(i) Demuestre que $q(x)$ es un polinomio y de explícitamente sus coeficientes en función de los coeficientes de p.

(ii) Demuestre que:

$$p = q \iff \text{para cada } k \text{ que no es múltiplo de 4, } a_k = 0.$$

P14. [**Varios**]

a) Sea p un polinomio con coeficientes reales tal que $p \not\equiv 0$ tal que $i, 1, 2, 3$ son raíces de p. De el grado mínimo del polinomio y suponiendo que p es del grado mínimo y mónico encuentrelo.

b) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

c) Sea $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, definamos:

$$p(x) = x^{3n_0} + x^{3n_1+1} + x^{3n_2+2}$$

Demuestre que $p(x)$ es divisible por $q(x) = x^2 + x + 1$.

P15. [**Funciones de polinomios**]

Sea $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, definida para todo polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ de la forma $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ como $F(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Es decir, F es la función que a todo polinomio le asocia la suma de sus coeficientes.

a) Estudie inyectividad y sobreyectividad de F.

b) Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $F(p) = 0$. Encuentre $x \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 0$.

P16. [Encontrar un polinomio]
Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $\text{gr}(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x-1)$ y que los restos de sus divisones por $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x-4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

P17. [Factorización y Morfismos]

a) Sea $p(x) = x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 13x - 9$. Se sabe que una de las raíces de $p(x)$ es $x = i$. Calcule todas las raíces de p y factorícelo en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(p(x)) = p(a)$$

(i) Demuestre que φ es un morfismo epiyectivo entre los anillos $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(ii) Pruebe que $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{(x-a)q(x) : q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$.

P18. [Correspondencia en Polinomios]
Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

a) Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) \geq 1$.
Hint : Puede ser útil el teorema fundamental del álgebra.

b) El objetivo de esta parte es probar que $p(x)$ es inyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) = 1$.

(i) Demuestre que si $\text{gr}(p) = 1$, entonces $p(x)$ es inyectivo.

(ii) Demuestre que si $\text{gr}(p) < 1$, entonces $p(x)$ no es inyectivo.

(iii) Sea $n > 1$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$. Definamos $q \in \mathbb{C}[x]$ como:

$$q(x) = \lambda(x-a)^n$$

Demuestre que $q(x)$ no es inyectivo.

(iv) Concluya la dirección que falta.

P19. [Una productoria]
El objetivo de este problema es probar que para $m \geq 2$:

$$\prod_{k=1}^{m-1} \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right) \doteq \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \cdot \ldots \cdot \sin\left(\frac{(m-2)\pi}{m}\right) \sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = \frac{m}{2^{m-1}}$$

Para esto se le propone lo siguiente:

a) Pruebe que:

$$\prod_{k=1}^{m-1} (1 - w_k) = (1 - w_1)(1 - w_2) \ldots (1 - w_{m-2})(1 - w_{m-1}) = m$$

Donde $w_1, \ldots, w_{m-1}$ son las raíces m-ésimas de la unidad en el orden usual.
Hint: Considere el polinomio $p(z) = z^m - 1$.

b) Use la parte anterior conjugando para demostrar que:

$$m^2 = 2^{m-1} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)\right)\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{m}\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2(m-2)\pi}{m}\right)\right)\left(1 - \cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)\right)$$

c) Concluya.