MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 14 : Divisores del Cero, Cuerpos y Complejos

22 de julio del 2017

Recordemos:

- Sean $(A,+,\cdot)$ y $(B,\oplus,\odot)$ dos anillos con unidad. $f: A \to B$ es un morfismo de anillos si $\forall x, y \in A$:
  1. $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$
  2. $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$
  3. $f(1_A) = 1_B$.
- Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo. Si $x, y \in A \setminus \{0\}$ son tales que $x \cdot y = 0$, diremos que x e y son divisores del 0.
- Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo y $a \in A \setminus \{0\}$, luego:
  $$a \text{ es divisor del } 0 \iff a \text{ no es cancelable}$$
- Sea $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un anillo conmutativo con unidad tal que todo $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ es invertible, diremos que $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es un cuerpo.
- De manera equivalente $(\mathbb{K}+,\cdot)$ es un cuerpo si y sólo si:
  1. $(\mathbb{K},+)$ es un grupo abeliano.
  2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\},\cdot)$ es un grupo abeliano.
  3. $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
- $(\mathbb{R},+,\cdot)$ y $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ son cuerpos.
- Un cuerpo no tiene divisores del 0.
- Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo conmutativo con unidad tal que $|A|$ es finito. Entonces $(A,+,\cdot)$ no tiene divisores del cero si y sólo si $(A,+,\cdot)$ es un cuerpo.
- Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ dotado de las siguientes operaciones, donde $z = (a,b)$ y $w = (c,d)$:
  $$\begin{aligned} z + w &= (a+c, b+d) \\ z \cdot w &= (ac-bd, ad+bc) \end{aligned}$$
- $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo
  1. $(0,0)$ es el neutro de $(\mathbb{C},+)$
  2. $(1,0)$ es el neutro de $(\mathbb{C},\cdot)$
  3. El inverso en $(\mathbb{C},+)$ de (a,b) es $(-a,-b)$.
  4. El inverso en $(\mathbb{C},\cdot)$ de $(a,b) \neq (0,0)$ es $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$
- La unidad imaginaria es el complejo (0,1). Se anotará como i. Se cumple que $i^2 = -1$
- **Forma cartesiana:** La expresión $a+ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ se llama la *forma cartesiana* del complejo $z = (a,b) \in \mathbb{C}$.
- Sea $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Definimos la parte real y la parte imaginaria respectivamente como:
  $$\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = a \qquad \mathbb{I}\mathrm{m}(z) = b$$
- $\mathbb{R}\mathrm{e}(\cdot)$ y $\mathbb{I}\mathrm{m}(\cdot)$ son morfismos de $(\mathbb{C},+)$ en $(\mathbb{C},+)$, es decir, son endomorfismos. Por lo tanto cumplen que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
  1. $\mathbb{R}\mathrm{e}(z_1+z_2) = \mathbb{R}\mathrm{e}(z_1) + \mathbb{R}\mathrm{e}(z_2)$.
  2. $\mathbb{I}\mathrm{m}(z_1+z_2) = \mathbb{I}\mathrm{m}(z_1) + \mathbb{I}\mathrm{m}(z_2)$.
- Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:
  1. $\mathbb{R}\mathrm{e}(\lambda z) = \lambda \mathbb{R}\mathrm{e}(z)$.
  2. $\mathbb{I}\mathrm{m}(\lambda z) = \lambda \mathbb{I}\mathrm{m}(z)$.
  3. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow [\mathbb{R}\mathrm{e}(z_1) = \mathbb{R}\mathrm{e}(z_2) \wedge \mathbb{I}\mathrm{m}(z_1) = \mathbb{I}\mathrm{m}(z_2)]$

P1. [Anillos Booleanos]
Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo booleano, esto es, $(A,+,\cdot)$ es un anillo que verifica $a^2 = a$ para todo $a \in A$. Demuestre que:

a) Para todo $x \in A$ se tiene que $x = -x$.

b) $(A,+,\cdot)$ es conmutativo.

c) Para todo $x, y \in A$ se tiene que $(x \cdot y) \cdot (x+y) = 0$.

d) Ningún anillo booleano con más de tres elementos es cuerpo. ¿Que pasa si el anillo tiene dos elementos ?

P2. [Producto de Cuerpos]
Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Definimos las siguientes operaciones sobre $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$:

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d) \qquad (a,b) \oplus (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

Se sabe por propiedades de herencia de la estructura producto que $(\mathbb{K}\times\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con unidad (¡no lo demuestre!).

a) Encuentre el neutro para $\oplus$ y el neutro para $\odot$.

b) Demuestre que $\forall (a,b) \in (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}}\}$:

$$(a,b) \text{ es divisor del } 0 \iff (a,b) \text{ no es invertible}$$

c) ¿Es $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ un cuerpo? Argumente.

P3. [Morfismos]
Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define el conjugado de un complejo como $\overline{z} = a - bi$.
Se define $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \overline{z}$. Demuestre que f es automorfismo en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

P4. [Forma Cartesiana]
Exprese de la forma $a + bi$ los siguientes complejos:

$$(1-i)^4(1+i)^4 \qquad 1 + i + \frac{i-1}{|i-1|^2 + i} \qquad \frac{(1+i)^{2017}}{(1-i)^{2017}}$$

Donde si $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Obs : lo anterior se conoce como el modulo *de un número complejo y en virtud del teorema de Pitágoras es una noción de distancia.*

P5. [Ecuación con Complejos] Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+ib} + \frac{2}{a-ib} = 1 + i$$

P6. [Ideales] Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un subconjunto $I \subseteq A$ se dirá **Ideal** de A si y sólo si:

(i) $(I, +)$ es subgrupo de $(A, +)$.

(ii) $(\forall\, a \in A)\, (\forall\, b \in I)\; a \cdot b \in I \,\wedge\, b \cdot a \in I$.

(a) Sea $F : (A, +, \cdot) \longrightarrow (B, \oplus, \odot)$ un morfismo de anillos. Demuestre que la preimagen $F^{-1}(\{0_B\})$ es un Ideal de A, donde $0_B \in B$ es el neutro para $\oplus$ en B.

(b) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad $1 \in A$, e I un ideal de A.

1) Demuestre que si $1 \in I$, entonces $I = A$

2) Demuestre que si $\exists x \in I$ invertible para $\cdot$ en A, entonces $I = A$

P7. [Divisores del Cero]
Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

a) Si $a \in A$ es un divisor del cero y $b \in A$ cualquiera, demuestre que si $a \cdot b \neq 0$, entonces $a \cdot b$ es un divisor del cero.

b) Demuestre que si el producto de dos elementos de A es un divisor de cero, entonces al menos uno de ellos es un divisor de cero.