

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesor: Mauricio Telias

Auxiliar: Arturo Merino



## Auxiliar 12 : Estructuras Algebraicas y Morfismos

2 de junio del 2017

**P1.** Consideremos  $(A, *)$  una estructura algebraica asociativa en  $A$ . Sea  $a \in A$  fijo, se define:

$$B = \{x \in A : a * x = x * a\}$$

Demuestre que:

- $\forall x, y \in B, x * y \in B$
- Si  $e \in A$  es neutro, entonces  $e \in B$
- Si  $x \in B$  tiene inverso  $x^{-1}$ , entonces  $x^{-1} \in B$

**P2.** [Tablas de multiplicación]

Sea  $(G, *)$  una estructura asociativa, con neutro y tal que todos sus elementos son invertibles.

- Demuestre que cada fila y cada columna de la tabla de multiplicación de  $(G, *)$  posee cada elemento de  $G$  una única vez.
- Complete las siguientes tablas de multiplicación asumiendo que son la tabla de multiplicación de una estructura asociativa, con neutro y tal que todos sus elementos son invertibles.

| $*$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $a$ | $a$ |     |     |     |
| $b$ |     | $a$ |     |     |
| $c$ |     | $d$ |     | $b$ |
| $d$ |     |     |     |     |

| $*$ | $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $t$ | $u$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $p$ |     |     | $q$ |     |     |     |
| $q$ | $r$ |     |     |     |     |     |
| $r$ |     |     |     |     | $r$ |     |
| $s$ |     | $p$ |     |     |     |     |
| $t$ |     |     |     |     |     |     |
| $u$ | $t$ |     |     |     |     | $p$ |

**P3.** a) Sea  $(A, *)$  una estructura algebraica con neutro  $e_A$  y  $(B, \triangle)$  una estructura algebraica, con neutro  $e_B$ , asociativa y con todos sus elementos invertibles, es decir

$$\forall x \in B, \exists y \in B, (x \triangle y) = (y \triangle x) = e_B$$

Demuestre que si  $f : A \rightarrow B$  es un homomorfismo entonces  $f(e_A) = e_B$ .

- Sea  $m \in \mathbb{N}$  y  $\varphi : (\mathbb{Z}_m, +_m) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$  un homomorfismo cualquiera. Determine el neutro de  $\mathbb{Z}_m$  y Demuestre que  $\varphi \equiv 0$ , es decir,  $\varphi$  es la función constante igual a 0.

**P4.** En  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$  se define la ley de composición interna  $\oplus$  como sigue

$$([n], m) \oplus ([n'], m') = ([n + n'], m + m')$$

Donde la operación  $+$  es la usual. Sea  $\varphi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  un homomorfismo de  $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$  en  $(\mathbb{Z}, +)$

- Demuestre que existe neutro en  $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$
- Demuestre que  $\varphi([1], 0) = 0$   
**Indicación:** Calcule  $\varphi([1], 0) \oplus ([1], 0) \oplus ([1], 0)$
- Concluya que  $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$  no es isomorfo a  $(\mathbb{Z}, +)$ .  
 Indicación: Puede usar la pregunta **P3.a)**

**P5.** Considere  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  con la operación  $\oplus$  definida por

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a +_2 c, b +_3 d)$$

- a) Pruebe que  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$  es una estructura algebraica, asociativa, que tiene neutro y que todos sus elementos son invertibles.
- b) Construya un isomorfismo  $f : (\mathbb{Z}_6, +_6) \rightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$  tal que  $f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3)$ . Concluya que es único.

**P6. [Operación de Funciones]**

Se define en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  la l.c.i.  $*$  como:

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre que:

- a)  $*$  es conmutativa.
- b)  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, *)$  posee elemento neutro, y encuentrelo.
- c)  $*$  distribuye con respecto a la suma de funciones,  $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$ .

- Dado un conjunto  $A$  no vacío. Diremos que  $*$  es una ley de composición interna (l.c.i) si  $*$  es una función

$$* : A \times A \rightarrow A$$

$$(x, y) \mapsto x * y$$

- Si  $*$  es una l.c.i definida en un conjunto  $A$ , entonces al par  $(A, *)$  lo llamaremos **estructura algebraica**. Si sobre  $A$  tenemos definida una segunda operación  $\triangle$ , denotaremos  $(A, *, \triangle)$  a la estructura algebraica que considera ambas l.c.i en  $A$

- Sea  $(A, *)$  una estructura algebraica.

1. Diremos que  $*$  es **asociativa** si

$$\forall x, y, z \in A, (x * y) * z = x * (y * z)$$

2. Sea  $e \in A$ . Diremos que  $e$  es elemento **neutro para  $*$**  si

$$\forall x \in A, e * x = x * e = x$$

3. Si  $e \in A$  es el neutro para  $*$ , diremos que  $x \in A$  es **invertible si**:

$$\exists y \in A, y * x = x * y = e$$

En tal caso, diremos que existe inverso de  $x$  y más aun  $y$  es un inverso de  $x$

4. Diremos que  $*$  es **conmutativa** si

$$\forall x, y \in A, x * y = y * x$$

5. Sea  $a \in A$ . Diremos que  $a$  es **absorbente** si:

$$\forall x \in A, x * a = a * x = a$$

6. Sea  $a \in A$ . Diremos que  $a$  es **idempotente** si  $a * a = a$

7. Sea  $a \in A$ . Diremos que  $a$  es **cancelable** si  $\forall y, z \in A$  se tienen:

$$a * y = a * z \Rightarrow y = z$$

$$y * a = z * a \Rightarrow y = z$$

8. Sea  $(A, *, \triangle)$  una estructura algebraica con dos operaciones. Diremos que  $\triangle$  **distribuye** con respecto a  $*$  si para todo  $x, y, z \in A$ , se tienen:

$$x \triangle (y * z) = (x \triangle y) * (x \triangle z)$$

$$(y * z) \triangle x = (y \triangle x) * (z \triangle x)$$

- Sea  $(A, *)$  una estructura algebraica. Se tiene que  $a \in A$  es cancelable si y sólo si las funciones  $I_a$  y  $D_a$  definidas por  $I_a(x) = a * x$  y  $D_a(x) = x * a$  para  $x \in A$ , son inyectivas.

- En una estructura algebraica  $(A, *)$ , el elemento neutro es **único**.

- Si la estructura algebraica  $(A, *)$  tiene neutro  $e$  y  $*$  es asociativa, entonces los inversos son únicos. De esta forma el inverso de  $x \in A$ , lo podemos denotar sin ambigüedad como  $x^{-1}$

- Sea  $(A, *)$  una estructura algebraica asociativa y con neutro  $e \in A$  entonces:

1. Si  $x \in A$  posee inverso, entonces  $x^{-1}$  también. Más aun,  $(x^{-1})^{-1} = x$

2. Si  $x, y \in A$  son invertibles entonces  $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

3. Si  $x \in A$  posee inverso, entonces  $x$  es cancelable.

- Se define  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} / \equiv_n$ . A partir de esto podemos definir:

- $[x]_n + [y]_n = [x + y]_n$
- $[x]_n \cdot [y]_n = [x \cdot y]_n$

Recordemos además que si  $x \equiv_n y$ , entonces  $[x]_n = [y]_n$

- Sea  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$  tal que  $x_1 \equiv_n x_2$  y  $y_1 \equiv_n y_2$ . Entonces

$$(x_1 + y_1) \equiv_n (x_2 + y_2) \text{ y } (x_1 \cdot y_1) \equiv_n (x_2 \cdot y_2)$$

Es decir, si  $[x_1]_n = [x_2]_n$  y  $[y_1]_n = [y_2]_n$ , entonces

$$[x_1 + y_1]_n = [x_2 + y_2]_n \text{ y } [x_1 \cdot y_1]_n = [x_2 \cdot y_2]_n$$

- (Notación)  $x \equiv_n y \iff x = y \text{ (mód } n)$

- Para dos estructuras  $(A, *)$ ,  $(B, \triangle)$  una función  $f : A \rightarrow B$  es un **homomorfismo** de  $(A, *)$  en  $(B, \triangle)$  si  $\forall x, y \in A, f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$ .

Si  $f$  es inyectiva se llamará monomorfismo

Si  $f$  es epiyectiva se llamará epimorfismo

si  $f$  es biyectiva se llamará isomorfismo

Si  $(A, *) = (B, \triangle)$  los homomorfismos se llamarán endomorfismos y en caso que si el endomorfismo es biyectivo se llamará automorfismo.

- Sea  $f : A \rightarrow B$  un epimorfismo entre  $(A, *)$  y  $(B, \triangle)$ , entonces se tienen las siguientes propiedades:

1. Si  $(A, *)$  es asociativo, entonces  $(B, \triangle)$  también lo es

2. Si  $(A, *)$  es conmutativo, entonces  $(B, \Delta)$  también lo es
3. Si  $e$  es neutro de  $(A, *)$ , entonces  $f(e)$  es neutro de  $(B, \Delta)$
4. Si  $a \in A$  tiene inverso  $b$  para  $(A, *)$ , entonces  $f(a)$  tiene inverso  $f(b)$  para  $(B, \Delta)$ , es decir  $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$

3 y 4 están sujetas a que el neutro de  $(B, \Delta)$  esté en la imagen de  $f$

- Sea  $f$  un homomorfismo de  $(A, *)$  en  $(B, \Delta)$ , no necesariamente epiyectivo, con neutros  $e_A$  y  $e_B$  respectivamente.

1. Si  $e_B \in f(A)$ , entonces  $e_B = f(a_A)$
2. Si  $e_B \in f(A)$  y  $a \in A$  tiene inverso  $b$  para  $(A, *)$ , entonces  $f(a)$  tiene inverso  $f(b)$  para  $(B, \Delta)$

- Sean  $(A, *)$  y  $(B, \Delta)$  con neutros  $e_A$  y  $e_B$  respectivamente y donde todos los elementos son invertibles. Un homomorfismo  $f : A \rightarrow B$  de  $(A, *)$  en  $(B, \Delta)$  es un monomorfismo, es decir es inyectivo, si y sólo si,  $f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$
- Sea  $f : A \rightarrow B$  un homomorfismo de  $(A, *)$  en  $(B, \Delta)$  y  $g : B \rightarrow C$  un homomorfismo de  $(B, \Delta)$  en  $(C, \bullet)$ . Entonces la composición  $g \circ f : A \rightarrow C$ , es un homomorfismo de  $(A, *)$  en  $(C, \bullet)$
- Dos estructuras  $(A, *)$  y  $(B, \Delta)$  son isomorfas, denotada  $(A, *) \cong (B, \Delta)$ , si existe una función  $f : A \rightarrow B$  que es un isomorfismo entre  $(A, *)$  y  $(B, \Delta)$
- Si  $f : A \rightarrow B$  es un isomorfismo entre  $(A, *)$  y  $(B, \Delta)$ , entonces  $f^{-1} : B \rightarrow A$  es un isomorfismo entre  $(B, \Delta)$  y  $(A, *)$
- La relación  $\cong$  entre estructuras algebraicas es relación de equivalencia