MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 11 : Conjuntos Infinitos

2 de junio del 2017

Recordemos:

Sean A, B conjuntos.

- Diremos que A y B tienen el mismo cardinal si existe $f : A \to B$ biyectiva. En tal caso diremos que $|A| = |B|$.
- Si existe $f : A \to B$ inyectiva, diremos que $|A| \leq |B|$.
- Si existe $f : A \to B$ inyectiva, pero no existe $g : A \to B$ biyectiva, diremos que $|A| < |B|$.
- Tenemos las siguientes propiedades del cardinal:
  1. $|A| \leq |A|$.
  2. Si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$.
  3. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, entonces $|A| \leq |C|$.
- **Teo. de Cantor-Bernstein-Schröder:** Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$.
- Diremos que A es infinito si no existe $f : A \to [1..n]$ biyectiva para ningún $n \in \mathbb{N}$.
- Si $f : A \to B$ es función, entonces $|f(A)| \leq |A|$.
- $\mathbb{N}$ es infinito
- Si un conjunto A es tal que $|A| = |\mathbb{N}|$ lo llamaremos numerable, si se verifica $|A| \leq |\mathbb{N}|$ diremos que es a lo más numerable.
- Si A es numerable, entonces a la sucesión biyectiva $a : \mathbb{N} \to A$, $(a_0, a_1, a_2, a_3, ...)$ le llamaremos enumeración de A.
- $\mathbb{N}^+$ $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.
- Si A es un conjunto infinito, entonces existe $H \subseteq A$ tal que $|H| = |\mathbb{N}|$.
- A es un conjunto infinito si y sólo si $|\mathbb{N}| \leq |A|$.
- Sea A un conjunto numerable y B un conjunto finito, entonces $|A \cup B| = |A \setminus B| = |A|$.
- Sean A, B conjuntos numerables, entonces $A \times B$ y $A \cup B$ es numerable.
- Sean $(A_k)_{k=0}^n = A_0, A_1, \ldots, A_n$ conjuntos numerables. Entonces:
$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |\mathbb{N}|$$
- Sea $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos numerables indexados por Λ, de manera que $|\Lambda| = |\mathbb{N}|$. Entonces:
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_k \text{ es numerable.}$$
- Diremos que un conjunto es infinito no numerable si $|\mathbb{N}| < |A|$
- Sea A un conjunto con al menos dos elementos, luego $\prod_{i \in \mathbb{N}} A$ es infinito no-numerable.
- **Teo. de Cantor:** $|A| < |\mathcal{P}(A)|$
- $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0,1]| = |\mathbb{R}|$

P1. [Varios de numerabilidad]

a) Considere el conjunto
$$C = \{\ldots,\ -16,\ -9,\ -4,\ -1,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots\},$$
vale decir, C es el conjunto de todos los cuadrados de números naturales, y sus opuestos. Pruebe que C es infinito numerable.

b) Los triángulos con vértices en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

c) Pruebe que el siguiente conjunto es numerable:
$$C = \{x \in [0, +\infty)\ :\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x^n \in \mathbb{N}\}.$$

P2. [Varios de no numerabilidad]
Demuestre que los siguientes conjuntos son infinitos no numerables.

a) Los números irracionales.
b) Los triángulos con vértices en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
c) $A \times B$. Donde A es un conjunto no numerable y $B \neq \emptyset$

P3. [Funciones en A]
Considere el conjunto $A \neq \emptyset$ y defina

$$\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow A \mid f \text{ es función}\}.$$

a) Demuestre que $|\mathcal{F}| = |A^3|$.
Indicación: Para $f \in \mathcal{F}$ considere la tupla $(f(1), f(2), f(3))$.
b) Demuestre que si A es numerable, entonces $\mathcal{F}$ también es numerable.

P4. [Caracterizaciones]
Demuestre que las siguientes proposiciones sobre un conjunto A son equivalentes.

a) A es infinito.
b) $|\mathbb{N}| \leq |A|$.
c) Existe $B \subsetneq A$ tal que $|B| = |A|$.
d) $|A| \geq 2$ y además $|A^2| = |A|$.

Hint: Puede ser útil razonar por contradicción.

P5. [Verdadero o Falso]
Sean A, B, C, D conjuntos.Demuestre o de un contraejemplo:

- Si $|A| = |B|$ y $|A \times C| = |B \times D|$, entonces $|C| = |D|$.
- Si $|A| = |B|$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$ y $|A \cup C| = |B \cup D|$, entonces $|C| = |D|$.

P6. [Preimagenes]
Sea A un conjunto y $f : A \to B$ una función tal que B es numerable. Demuestre que si $\forall b \in B$, $f^{-1}(\{b\})$ es numerable, entonces A es numerable.

P7. [El recorrido de un insecto]
Un insecto debe cubrir, saltando de izquierda a derecha, la distancia desde 0 a 1 en una recta. En cada punto de su recorrido, el insecto puede elegir entre saltar directamente hacia el uno (y así completar su viaje), o avanzar la mitad del tramo que le falta por cubrir.

Pruebe que la colección de recorridos (secuencias de pasos) por los que puede optar nuestro insecto, es numerable.

P8. [Cardinalidades y el conjunto potencia]
Sean A, B conjuntos.

a) Demuestre que si $|A| = |B|$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.
b) Suponga ahora que $A \cap B = \emptyset$. Demuestre que $|\mathcal{P}(A \cup B)| = |\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)|$.

P9. [Conjuntos con sumas acotadas uniformemente]
Sea $b \in \mathbb{R}^+$ y $A \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que para todo subconjunto finito $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq A$ se tiene la siguiente propiedad:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq b$$

Demuestre que A es a lo más numerable.
Hint : Para todo $n \in \mathbb{N}$ defina $A_n = \{x \in A : x \geq \frac{1}{n}\}$. ¿Que puede decir sobre $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $|A_n|$?

Obs: Los problemas de acá en adelante, son bastante más difíciles que los anteriores.

P10. [Intervalos disjuntos par a par]
Un *intervalo* (en $\mathbb{R}$) es un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$[(x, z \in I) \wedge (x < y < z)] \implies y \in I$$

Además un intervalo será *no degenerado* si contiene al menos dos elementos. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto de intervalos no degenerados que además son disjuntos par a par (i.e. si $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cap B = \emptyset$). Demuestre que $\mathcal{I}$ es a lo más numerable.

P11. [Números algebraicos y trascendentes]
Un número *algebraico* (en $\mathbb{R}$) es un número real que es solución de una ecuación de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Donde $n \in \mathbb{N}$, $\forall i, a_i \in \mathbb{Z}$ y $a_n \neq 0$, si un número no es algebraico lo llamaremos *trascendente*.
La idea de este problema es demostrar la existencia de números trascendentes, para esto se propone lo siguiente:

a) Demuestre que si $m \in \mathbb{N}$ está fijo, entonces:

$$E_m = \{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}, a_m \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\}$$

Es numerable.

b) Demuestre que existen numerables ecuaciones algebraicas de la forma presentada en el enunciado.

c) Demuestre que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

d) Demuestre que $|\mathcal{A}| = |\mathbb{R}|$.

e) Concluya.

P12. [¿Cuantas relaciones de equivalencia hay en $\mathbb{N}$?]
Sea

$$\mathcal{E} = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : R \text{ es relación de equivalencia}\}$$

El objetivo de este problema es demostrar que $|\mathcal{E}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, para esto se le propone lo siguiente:

a) Demuestre que $|\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

b) Demuestre que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{E}|$.
Hint : Piense en particiones.

c) Concluya.