MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 11 : Conjuntos Infinitos

2 de junio del 2017

P1. [Varios de numerabilidad]

a) Considere el conjunto
$$C = \{\ldots,\ -16,\ -9,\ -4,\ -1,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots\},$$
vale decir, C es el conjunto de todos los cuadrados de números naturales, y sus opuestos.
Pruebe que C es infinito numerable.

b) Demuestre que los triángulos con vértices en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ son numerables.

c) Pruebe que el siguiente conjunto es numerable:
$$C = \{x \in [0, +\infty)\ :\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x^n \in \mathbb{N}\}.$$

Solución 1.

a) Esto se puede hacer de varias formas. Consideremos los conjuntos
$$C_+ = \{x \in C\ :\ x \geq 0\} \quad , \quad C_- = \{x \in C\ :\ x \leq 0\}.$$
Para C_+, definamos la siguiente función $f : \mathbb{N} \to C_+$ por:
$$f(x) = x^2,$$
función que es muy fácil probar que es una biyección entre los conjuntos en cuestión. Luego, concluimos que C_+ es numerable. Y análogamente, para C_- se define la función $g : \mathbb{N} \to C_-$ por:
$$g(x) = -x^2,$$
que en forma totalmente análoga a lo anterior, resulta ser una biyección. Así, C_- también es un conjunto numerable.

Para concluir, basta notar que $C = C_+ \cup C_-$, y dado que la unión de dos conjuntos numerables sigue siendo numerable, se concluye el resultado buscado.
Obs: También se puede definir una biyección $\phi : \mathbb{N} \to C$ sin separar C, por ejemplo:
$$\phi(n) = \begin{cases} (\frac{n+1}{2})^2 & \text{si } n \text{ es impar.} \\ -(\frac{n}{2})^2 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$
O por otra parte demostrar que C es infinito y notar que $C \subseteq Z$ implica que $|C| \leq |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, o hacer una biyección con $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) Sea T el conjunto de los triangulos pedidos. Separaremos la demostración en dos partes:

- ($|\mathbb{N}| \leq |T|$):
  Consideremos el triangulo t_n dado por los puntos:
  $$A = (0,0) \qquad B = (0,1) \qquad C_n = (n+1, 0)$$
  El conjunto $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es numerable (pues acabamos de dar una enumeración para el) y además $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T$, de esto concluimos que:
  $$|\mathbb{N}| = |(t_n)_{n\in\mathbb{N}}| \leq |T|$$

- ($|T| \leq |\mathbb{N}|$):
  Notemos que el conjunto T es subconjunto de el conjunto de los triples ordenados de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, es decir $T \subseteq (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^3$. Además $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, entonces $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \times (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \times (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ es el producto finito de numerables y por tanto es numerable. Luego:

$$|T| \leq |(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^3| = |\mathbb{N}|$$

Por el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder concluimos que $|T| = |\mathbb{N}|$.

c) Procediendo en forma similar a lo realizado en la parte *a*), definamos para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ el conjunto

$$C_n = \{x \in C \ : \ x^n = m, \ m \in \mathbb{N}\} = \{x \in C \ : \ x = \sqrt[n]{m}, \ m \in \mathbb{N}\}.$$

A partir de la definición del conjunto, como la raíz n-ésima es una función biyectiva en los dominios que tenemos, podemos concluir rápidamente que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, C_n es un conjunto numerable (al estar en biyección con los naturales).

Para concluir el resultado pedido en el problema notemos que:

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad x^n \in \mathbb{N} \iff \exists n, m \in \mathbb{N} \quad x^n = \exists n, m \in \mathbb{N} m \iff x = \exists n \in \mathbb{N} \sqrt[n]{m} \iff x \in C_n,$$

de esto tenemos que que

$$C = \{x \in [0, +\infty) \ : \ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \ x^n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{x \in [0, +\infty) \ : \ x^n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} C_n$$

Luego, como la unión numerable de conjuntos numerables sigue siendo un conjunto numerable, se deduce el resultado.

P2. [Varios de no numerabilidad]
Demuestre que los siguientes conjuntos son infinitos no numerables.

a) Los números irracionales.

b) Los triángulos con vértices en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

c) $A \times B$. Donde A es un conjunto no numerable y $B \neq \emptyset$

Solución 2.

a) Supongamos en busca de una contradicción que los numeros irracionales $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son a lo más numerables. En dicho caso:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Luego $\mathbb{R}$ sería la unión de de un numerable con un numerable o finito y por tanto es numerable, lo que es una contradicción.

b) Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de los triangulos con vértices en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definamos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{T}$ como sigue:

$$\varphi(r) = \triangle ABC$$

con $A = (r, 0)$, $B = (r + 1, 0)$, $C = (r, 1)$. Esta función es inyectiva, basta con notar que si $\varphi(r) = \varphi(s)$, entonces $(r, 1) = (s, 1)$ y por tanto $r = s$ y por tanto demostramos que existe una inyección de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{T}$, esto nos permite concluir que:

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{T}|$$

Es decir $\mathcal{T}$ es no numerable.

c) Como $B \neq \emptyset$ tenemos que existe $b \in B$. Definamos $f : A \to A \times B$ como:

$$f(a) = (a, b)$$

Veamos que esta función es inyectiva, en efecto si $f(a) = f(a')$, entonces $(a, b) = (a', b)$ de donde $a = a'$. Como encontramos una inyección de A en $A \times B$ y A es no numerable concluimos que:

$$|\mathbb{N}| < |A| \leq |A \times B|$$

Es decir $A \times B$ es no numerable.

P3. [Funciones en A]
Considere el conjunto $A \neq \emptyset$ y defina

$$\mathcal{F} = \{f : \{1,2,3\} \longrightarrow A \mid f \text{ es función}\}.$$

a) Demuestre que $|\mathcal{F}| = |A^3|$.
Indicación: Para $f \in \mathcal{F}$ considere la tupla $(f(1), f(2), f(3))$.

b) Demuestre que si A es numerable, entonces $\mathcal{F}$ también es numerable.

Solución 3.

a) Siguiendo la indicación definamos la función $\phi : \mathcal{F} \to A^3$ como:

$$\phi(f) = (f(1), f(2), f(3))$$

Demostremos que ϕ es biyección

- **Inyectividad:**
Sean $f, g \in \mathcal{F}$ tales que $\phi(f) = \phi(g)$, entonces

$$(f(1), f(2), f(3)) = (g(1), g(2), g(3))$$

Es decir $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio, como el dominio y el recorrido de f y g coinciden, concluimos que $f = g$ y que ϕ es inyectiva.

- **Sobreyectividad:**
Sea $a = (a_1, a_2, a_3) \in A^3$, definamos la función $f : \{1,2,3\} \to A$ como:

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & \text{si } x = 1 \\ a_2 & \text{si } x = 2 \\ a_3 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Luego como $\phi(f) = a$ concluimos que ϕ es sobreyectiva.

De esto concluimos que ϕ es una biyección y que $|\mathcal{F}| = |A^3|$.

b) Si A es numerable, entonces A^3 es el producto cartesiano de numerables y por tanto numerable, es decir $|A^3| = |\mathbb{N}|$. Apoyandonos de la parte *a*) tenemos:

$$|\mathcal{F}| = |A^3| = |\mathbb{N}|$$

De donde concluimos.

P4. [Caracterizaciones]
Demuestre que las siguientes proposiciones sobre un conjunto A son equivalentes.

a) A es infinito.

b) $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

c) Existe $B \subsetneq A$ tal que $|B| = |A|$.

d) $|A| \geq 2$ y además $|A^2| = |A|$.

Hint: Puede ser útil razonar por contradicción.

Solución 4. Pendiente

P5. [Verdadero o Falso]
Sean A, B, C, D conjuntos.Demuestre o de un contraejemplo:

- Si $|A| = |B|$ y $|A \times C| = |B \times D|$, entonces $|C| = |D|$.
- Si $|A| = |B|$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$ y $|A \cup C| = |B \cup D|$, entonces $|C| = |D|$.

Solución 5. Ambas son falsas.

a) Sea $A = B = C = \mathbb{N}$ y $D = \{1\}$. Notemos que $|A| = |B|$ y $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \{1\}| = |\mathbb{N}|$ ($|A \times C| = |B \times D|$), pero $|\mathbb{N}| \neq |\{1\}|$ ($|C| \neq |D|$).

b) Sea $A = B = \mathbb{N}$, $C = \{-1\}$ y $D = \emptyset$. Notemos que $|A| = |B|$ y $|\mathbb{N} \cup \{-1\}| = |\mathbb{N}|$ ($|A \cup C| = |B \cup D|$), pero $|\{-1\}| \neq |\emptyset|$ ($|C| \neq |D|$).

P6. [Preimagenes]
Sea A un conjunto y $f : A \to B$ una función tal que B es numerable. Demuestre que si $\forall b \in B$, $f^{-1}(\{b\})$ es numerable, entonces A es numerable.

Solución 6. Pendiente

P7. [El recorrido de un insecto]
Un insecto debe cubrir, saltando de izquierda a derecha, la distancia desde 0 a 1 en una recta. En cada punto de su recorrido, el insecto puede elegir entre saltar directamente hacia el uno (y así completar su viaje), o avanzar la mitad del tramo que le falta por cubrir.

Pruebe que la colección de recorridos (secuencias de pasos) por los que puede optar nuestro insecto, es numerable.

Solución 7. Llamemos $\mathcal{R}$ a la colección de todos los recorridos posibles. El insecto puede optar por las siguientes alternativas en su viaje:

- Uno de los recorridos factibles corresponde a saltar infinitas veces la mitad del camino que le falta por recorrer. Como esta opción nos lleva sólo a un recorrido, llamaremos a este camino R_0.
- Para cada $n \geq 1$, el insecto puede llegar a su meta en precisamente n pasos de la siguiente forma: salta $n-1$ veces la mitad de lo que le falta de recorrido, y luego su n-ésimo salto lo hace directo hasta el 1. Esta alternativa nos lleva a un recorrido factible para cada $n \in \mathbb{N}$, que denotaremos R_n, y a la colección de todos estos caminos la denotaremos $\{R_n\}_{n\geq 1} = \{R_1, R_2, \ldots\}$.

Así, es claro que la cantidad de recorridos está en biyección con el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$, que es claramente de cardinal infinito numerable. Luego, la cantidad de recorridos posibles es la misma, y por ende el cardinal de la colección de todos los caminos posibles corresponde a:

$$|\mathcal{R}| = |\{R_n\}_{n\geq 1} \cup R_0| = |\mathbb{N} \cup \{0\}| = |\mathbb{N}|,$$

de donde concluimos el resultado que se buscaba.

P8. [Cardinalidades y el conjunto potencia]
Sean A, B conjuntos.

a) Demuestre que si $|A| = |B|$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

b) Suponga ahora que $A \cap B = \emptyset$. Demuestre que $|\mathcal{P}(A \cup B)| = |\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)|$.

Solución 8.

a) Como $|A| = |B|$ existe una $f : A \to B$ biyectiva. Definamos $\phi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ como:

$$\phi(X) = f(X)$$

Demostremos que ϕ es biyectiva. Definamos $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ como:

$$g(X) = f^{-1}(X)$$

Luego como f es biyectiva:

$$(g \circ \phi)(X) = g(\phi(X)) = g(f(X)) = f^{-1}(f(X)) = X$$

Y además:

$$(\phi \circ g)(X) = \phi(g(X)) = \phi(f^{-1}(X)) = f(f^{-1}(X)) = X$$

Luego ϕ es invertible y por tanto ϕ es biyectiva. Con esto concluimos que $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

b) Definamos $h : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A \cup B)$ como:

$$h(X, Y) = X \cup Y$$

Veamos que esta función es biyección.

- **Sobreyectividad:**
  Sea $Z \in \mathcal{P}(A \cup B)$ queremos encontrar un $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ tal que $F(X, Y) = Z$. Tomemos $(X, Y) = (Z \cap A, Z \cap B)$, veamos que se verifica $F(X, Y) = Z$

  $$F(X, Y) = F(Z \cap A, Z \cap B) = (Z \cap A) \cup (Z \cap B) = Z \cap (A \cup B) = Z$$

  Donde la última igualdad se verifica pues $Z \subseteq A \cup B$.
- **Inyectividad:**
  Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) tal que $F(X_1, Y_1) = F(X_2, Y_2)$ queremos probar que F es inyectiva (es decir que $(X_1, Y_1) = (X_2, Y_2)$). Veamos que esto pasa:

  $$\begin{gathered} F(X_1, Y_1) = F(X_2, Y_2) \\ X_1 \cup Y_1 = X_2 \cup Y_2 \\ (X_1 \cup Y_1) \cap A = (X_2 \cup Y_2) \cap A \\ (X_1 \cap A) \cup (Y_1 \cap A) = (X_2 \cap A) \cup (Y_2 \cap A) \end{gathered}$$

  Como $X_1, X_2 \subseteq A$, entonces $X_1 \cap A = X_1$ y $X_2 \cap A = X_2$. Además como $A \cap B = \emptyset$, $Y_1 \subseteq B$ y $Y_2 \subseteq B$ tenemos que $Y_1 \cap A = \emptyset$ e $Y_2 \cap A = \emptyset$. Aplicando todo esto a la ecuación anterior concluimos que:

  $$X_1 \cup \emptyset = X_2 \cup \emptyset \implies X_1 = X_2$$

  Veamos que pasa cuando intersectamos con B:

  $$\begin{gathered} (X_1 \cup Y_1) \cap B = (X_2 \cup Y_2) \cap B \\ (X_1 \cap B) \cup (Y_1 \cap B) = (X_2 \cap B) \cup (Y_2 \cap B) \end{gathered}$$

  De manera análoga a lo anterior como $Y_1, Y_2 \subseteq B$, entonces $Y_1 \cap B = Y_1$ y $Y_2 \cap B = Y_2$. Además como $A \cap B = \emptyset$, $X_1, X_2 \subseteq B$ tenemos que $X_1 \cap B = \emptyset$ y $X_2 \cap B = \emptyset$. Aplicando todo esto a la ecuación anterior concluimos que:

  $$\emptyset \cup Y_1 = \emptyset \cup Y_2 \implies Y_1 = Y_2$$

Luego $|\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A \cup B)|$.

P9. [Conjuntos con sumas acotadas uniformemente]
Sea $b \in \mathbb{R}^+$ y $A \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que para todo subconjunto finito $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq A$ se tiene la siguiente propiedad:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq b$$

Demuestre que A es a lo más numerable.
Hint : Para todo $n \in \mathbb{N}$ defina $A_n = \{x \in A : x \geq \frac{1}{n}\}$. ¿Que puede decir sobre $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $|A_n|$?

Solución 9. Notemos que al tomar k elementos de algún A_n su suma es por lo menos $\frac{k}{n}$, como esta suma debe ser siempre menor que b (pues $A_n \subseteq A$), tenemos que A_n tiene a lo más $\lceil \frac{b}{kn} \rceil$ elementos, es decir A_n es finito. Notemos además que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Es decir A es la unión numerable de conjuntos finitos, por tanto es a lo más numerable.

Obs: Los problemas de acá en adelante, son bastante más difíciles que los anteriores.

P10. [Intervalos disjuntos par a par]
Un *intervalo* (en $\mathbb{R}$) es un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$[(x, z \in I) \wedge (x < y < z)] \implies y \in I$$

Además un intervalo será *no degenerado* si contiene al menos dos elementos. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto de intervalos no degenerados que además son disjuntos par a par (i.e. si $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cap B = \emptyset$). Demuestre que $\mathcal{I}$ es a lo más numerable.

Solución 10. Notemos que todo intervalo no degenerado contiene por lo menos un racional. Definamos la función $f : \mathcal{I} \to \mathbb{Q}$ tal que a cada intervalo $I \in \mathcal{I}$ le asocia un numero racional que este en I. Notemos que esta función es inyectiva pues si $I, J \in \mathcal{I}$ tal que $I \neq J$, además por enunciado tenemos que $I \cap J = \emptyset$, luego si $f(I) = f(J)$, entonces $f(I) \in I$ y $f(I) = f(J) \in J$, lo que contradice el hecho de que son disjuntos, concluimos entonces que $f(I) \neq f(J)$ y por tanto que f es inyectiva. Como existe una inyección de $\mathcal{I}$ a $\mathbb{Q}$ tenemos que $|\mathcal{I}| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ y por tanto $\mathcal{I}$ es a lo más numerable.

P11. [Números algebraicos y trascendentes]

Un número *algebraico* (en $\mathbb{R}$) es un número real que es solución de una ecuación de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Donde $n \in \mathbb{N}$, $\forall i, a_i \in \mathbb{Z}$ y $a_n \neq 0$, si un número no es algebraico lo llamaremos *trascendente*.
La idea de este problema es demostrar la existencia de números trascendentes, para esto se propone lo siguiente:

a) Demuestre que si $m \in \mathbb{N}$ está fijo, entonces:

$$E_m = \{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}, a_m \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\}$$

Es numerable.

b) Demuestre que existen numerables ecuaciones algebraicas de la forma presentada en el enunciado.

c) Demuestre que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

d) Demuestre que el conjunto de los números trascendentes es infinito no numerable.

e) Concluya.

Solución 11.

a) Definamos la función $f : E_m \to (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}^m$ como:

$$f(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = (a_m, (a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0))$$

Esta función es biyectiva. Con esto concluimos que $|E_m| = |(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}^m| = |\mathbb{N}|$.

b) Sea E el conjunto de las ecuaciones algebraicas. Notemos que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ luego E es una unión numerable de conjuntos numerables y por tanto E es numerable.

c) Definamos $\mathcal{A}$ como el conjunto de números algebraicos, separemos la demostración en dos partes:

- ($|\mathcal{A}| \leq |\mathbb{N}|$): Notemos que:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{e(x)\in E} \{x \in \mathbb{R} : e(x) = 0\}$$

Luego $\mathcal{A}$ es una unión numerable de a lo más numerables, por tanto $\mathcal{A}$ es a lo más numerable, es decir $|\mathcal{A}| \leq |\mathbb{N}|$.

- ($|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{A}|$):
Notemos que como:

$$x - m = 0$$

Es una ecuación algebraica para $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{A}$ y por tanto:

$$|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{A}|$$

Por el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder concluimos que $|\mathcal{A}| = |\mathbb{N}|$.

d) Llamemos $\mathcal{T}$ al conjunto de los números trascendentes, notemos que $\mathcal{T} = \mathcal{A}^c$. Demostremos que $\mathcal{T}$ tiene que ser un conjunto infinito no numerable, pues si fuera a lo más numerable tenemos que:

$$|\mathbb{R}| = |\mathcal{A} \cup \mathcal{T}| \leq |\mathbb{N}|$$

Lo que contradice el hecho que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Por tanto $|\mathbb{N}| < |\mathcal{T}|$.

e) Como $|\mathbb{N}| < |\mathcal{T}|$, $\mathcal{T}$ no puede ser vacío.

P12. **[¿Cuantas relaciones de equivalencia hay en $\mathbb{N}$?]**
Sea

$$\mathcal{E} = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : R \text{ es relación de equivalencia}\}$$

El objetivo de este problema es demostrar que $|\mathcal{E}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, para esto se le propone lo siguiente:

a) Demuestre que $|\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

b) Demuestre que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{E}|$.
Hint : Piense en particiones.

c) Concluya.

Solución 12.

a) Recordemos que $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, luego existe una $f : (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ biyectiva. Definamos $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ como:

$$\phi(X) = f(X)$$

Demostremos que ϕ es biyectiva. Definamos $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ como:

$$g(X) = f^{-1}(X)$$

Luego como f es biyectiva:

$$(g \circ \phi)(X) = g(\phi(X)) = g(f(X)) = f^{-1}(f(X)) = X$$

Y además:

$$(\phi \circ g)(X) = \phi(g(X)) = \phi(f^{-1}(X)) = f(f^{-1}(X)) = X$$

Luego ϕ es invertible y por tanto ϕ es biyectiva. Con esto concluimos que $|\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
Obs: Notemos que esta demostración se puede extender para demostrar que:

$$|A| = |B| \implies |\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$$

b) Sea P el conjunto de particiones de $\mathbb{N}$. Definamos la función $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to P$, asumiendo que los $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ están ordenados de menor a mayor, es decir $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ con $x_i \leq x_{i+1}$ $\forall i$:

$$f(X) = \{\{x_1, x_1 + 1, x_1 + 2, \dots, x_2 - 1\}, \{x_2, x_2 + 1, \dots, x_3 - 1\}, \dots, \{x_{n-1}, x_{n-1} + 1, \dots, x_n - 1\}\}$$

Por ejemplo $f(\{1,3\}) = \{\{1,2\},\{3,4,5,\dots\}\}$ y $f(\text{Pares}) = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\dots\}$. Esta función es inyectiva, pues si $X \neq Y$, entonces existe un $z \in X \setminus Y$ o en $Y \setminus X$, supongamos sin perdida de generalidad que $z \in X \setminus Y$, luego la particion $f(X)$ comienza un nuevo conjunto en z mientras que la $f(Y)$ no, por tanto $f(X) \neq f(Y)$. Concluimos que f es inyectiva y más aún $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{E}|$.

c) Notemos que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, luego:

$$|\mathcal{E}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

Además por la parte *b*) tenemos que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{E}|$ por el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder concluimos que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{E}|$.