MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

El Teorema de Cantor

4 de junio del 2017

Teorema (de Cantor, versión $\mathbb{N}$)**.** $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Demostración. Notemos que $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por:

$$f(n) = \{n\}$$

Es una inyección. Por tanto, basta con demostrar que no existe una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Supongamos que dicha biyección existe, llamemosla g. Notemos entonces que podemos construir una tabla (infinita) de la siguiente manera:

	¿Está el 0?	¿Está el 1?	¿Está el 2?	¿Está el 3?	...
$g(0)$	**SI**	NO	NO	SI	
$g(1)$	NO	**NO**	NO	SI	
$g(2)$	NO	NO	**NO**	NO	
$g(3)$	SI	SI	NO	**SI**	
$\vdots$					

Cabe notar que como g es biyección, en la primera columna tenemos TODOS los conjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definamos un conjunto B de la siguiente manera:

$$X = \{n \in \mathbb{N} : n \notin g(n)\}$$

Es decir X toma el valor contrario al encontrado en la diagonal, es decir en la tabla de ejemplo X no contiene al 0, pero contiene al 1 y al 2 y por último no contiene al 3. Luego $X \neq g(n)$ para todo n, pues de la definición:

$$n \in X \iff n \notin g(n)$$

Es decir A no se encuentra en la lista pues difiere en el n-ésimo elemento, lo que es una contradicción. Por tanto A es no numerable. □

Obs: Si bien la lista anterior sirve para fijar ideas, el mismo argumento sirve para demostrar el caso general.

Teorema (de Cantor, versión completa)**.** *Sea A un conjunto, entonces $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Demostración. Supongamos en busca de una contradicción que $|A| \not< |\mathcal{P}(A)|$. Recordando que

$$|B| < |C| \iff \text{Existe una inyección, pero no una biyección de } B \text{ a } C.$$

La negación sería entonces:

$$|B| \not< |C| \iff \text{No existe una inyección o existe una biyección de } B \text{ a } C.$$

Como en nuestro caso es claro que existe una inyección (¿cúal?), basta con demostrar que no existe una biyección, supongamos entonces en busca de una contradicción que existe una f biyectiva entre A y $\mathcal{P}(A)$. Definamos el conjunto:

$$X = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

Luego como $X \in \mathcal{P}(A)$ y f es sobreyectiva, $\exists a \in A$ tal que $f(a) = X$. Analicemos si $a \in X$.

- **Caso 1:** $(a \in X)$
  Si $a \in X$, como $X = f(a)$ tenemos que $a \in f(a)$, por ende $a \notin X$ lo que es una contradicción.
- **Caso 2:** $(a \notin X)$
  Si $a \notin X$, como $X = f(a)$ tenemos que $a \notin f(a)$, por ende $a \in X$ lo que es una contradicción.

Como de cualquier manera llegamos a una contradicción, concluímos que no existe una biyección de A en $\mathcal{P}(A)$, por tanto $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. $\square$