MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 10 : Conjuntos Finitos

25 de mayo del 2017

Recordemos:

- Un conjunto A es finito si para algún $n \in \mathbb{N}$ existe una función biyectiva $f : A \to [1..n]$.
- Definimos la relación de equivalencia $\mathcal{I}$ en $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ como:

$$A\mathcal{I}B \iff \text{existe } f : A \to B \text{ biyectiva}$$

  Si $A\mathcal{I}B$ diremos que A y B tienen el mismo cardinal (o la misma cardinalidad).
- Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $[1..n]\mathcal{I}[1..m]$ si y sólo si $n = m$.
- El cardinal de un conjunto finito A es el único $n \in \mathbb{N}$ tal que $A\mathcal{I}[1..n]$, en dicho caso escribiremos $|A| = n$.
- Para todo conjunto A, $|A| = 0$ si y sólo si $A = \emptyset$.
- Sea B un conjunto finito y sea $A \subseteq B$. Entonces A es finito y $|A| \leq |B|$.
- Si A y B son disjuntos $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- Si $B \subseteq A$ y A es finito, entonces $|A \setminus B| = A - B$. En particular, $|B| \leq |A|$ y si $|A| = |B|$, entonces $B = A$.
- Si A y B son conjuntos finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Sean A, B conjuntos finitos tales que $|A| = |B|$ y sea $f : A \to B$ función. Las siguientes afirmaciones son todas equivalentes:
  (i) f es inyectiva.
  (ii) f es sobreyectiva.
  (iii) f es biyectiva.
- Sean A y B conjuntos finitos no vacíos. Entonces $|A| \leq |B|$ si y sólo si existe $f : A \to B$ inyectiva.
- Si los conjuntos finitos $A_1, \ldots, A_n$ son disjuntos par a par, entonces:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

- Para A y B conjuntos finitos se tiene que $|A \times B| = |A||B|$. En general si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

- Sean A y B conjuntos. Definimos el conjunto de todas las funciones de A en B por:

$$B^A = \{f : A \to B \mid f \text{ es función}\}$$

  Si A y B son finitos, $|B^A| = |B|^{|A|}$.
- Sea A un conjunto finito, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

P1. [Varios]
Demuestre que los siguientes conjuntos son finitos.

a) $A = \{f : [1..n] \to [1..n] \mid f \text{ es biyectiva}\}$
b) $C = \{f : \mathbb{R} \to [1..n] \mid f \text{ es biyectiva}\}$

P2. [Calculo de Cardinales]
Sean A, B y C conjuntos finitos:

a) Demuestre que:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

b) Calcule $|(A \cup B) \times (B \cup C)|$ en términos de cardinal de A, B y C y sus intersecciones.

P3. [Conjunto Potencia]
Sea A un conjunto finito. Demuestre que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

P4. [Cardinal de conjunto de funciones]
Sea $n \in \mathbb{N}$ y A un conjunto tal que $|A| = n$.

a) Calcule $|\{f : A \to \{0,1\} \mid f \text{ es sobreyectiva}\}|$.

b) Demuestre que $|\{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva}\}| = n!$.

P5. [Principio del Palomar]
Sea $A = [0..n]$ y considere la secuencia $(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ de elementos en A. Pruebe que existen $l, j \in \mathbb{N}$ tales que $x_l = x_j$.

P6. [Paridad]
Sean $P = \{A \subseteq [1..n] : |A| \text{ es par}\}$ y $I = \{A \subseteq [1..n] : |A| \text{ es impar}\}$.

a) Demuestre que P e I son finitos.

b) Demuestre que $|P| = |I|$.