MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 10 : Conjuntos Finitos

25 de mayo del 2017

P1. [Varios]
Demuestre que los siguientes conjuntos son finitos.

a) $A = \{f : [1..n] \to [1..n] \mid f \text{ es biyectiva}\}$

b) $C = \{f : \mathbb{R} \to [1..n] \mid f \text{ es biyectiva}\}$

Solución 1.

a) PENDIENTE

b) PENDIENTE

P2. [Calculo de Cardinales]
Sean A, B y C conjuntos finitos:

a) Demuestre que:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

b) Calcule $|(A \cup B) \times (B \cup C)|$ en términos de cardinal de A, B y C y sus intersecciones.

Solución 2.

a) PENDIENTE

b)

$$\begin{aligned} ||(A \cup B) \times (B \cup C)|| &= |(A \cup B)||(B \cup C)| \\ &= (|A| + |B| - |A \cap B|)(|B| + |C| - |B \cap C|) \end{aligned}$$

P3. [Conjunto Potencia]
Sea A un conjunto finito. Demuestre que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Solución 3. PENDIENTE

P4. [Cardinal de conjunto de funciones]
Sea $n \in \mathbb{N}$ y A un conjunto tal que $|A| = n$.

a) Calcule $|\{f : A \to \{0,1\} \mid f \text{ es sobreyectiva}\}|$.
b) Demuestre que $|\{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva}\}| = n!$.

Solución 4.

a) Notemos primero que:

$$\underbrace{\{f : A \to \{0,1\} \mid f \text{ es función}\}}_{=\{0,1\}^A} = \{f : A \to \{0,1\}|f \text{ es sobreyectiva}\} \cup \{f : A \to \{0,1\}|f \text{ no es sobreyectiva}\}$$

Notemos que hay sólo dos funciones que no son sobreyectivas que llegan a $\{0,1\}$. Estas son la funcion $f_0 : A \to \{0,1\}$ y $f_1 : A \to \{0,1\}$, definidas por:

$$f_0(x) = 0 \qquad\qquad f_1(x) = 1$$

Luego:

$$\begin{aligned}
|\{0,1\}^A| &= |\{f : A \to \{0,1\}|f \text{ es sobreyectiva}\} \cup \{f : A \to \{0,1\}|f \text{ no es sobreyectiva}\}| \\
&= |\{f : A \to \{0,1\}|f \text{ es sobreyectiva}\}| + |\{f : A \to \{0,1\}|f \text{ no es sobreyectiva}\}| \\
&= |\{f : A \to \{0,1\}|f \text{ es sobreyectiva}\}| + |\{f_0, f_1\}| \\
&= |\{f : A \to \{0,1\}|f \text{ es sobreyectiva}\}| + 2
\end{aligned}$$

Como $|\{0,1\}^A| = 2^{|A|}$ tenemos que $|\{f : A \to \{0,1\}|f \text{ es sobreyectiva}\}| = 2^{|A|} - 2$.

b) Lo demostraremos por inducción en n.

- **Caso Base:** $n = 1$
  Si $|A| = 1$ hay solo una función y es biyectiva. Luego $|\{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva}\}| = 1!$.
- **Hipótesis inductiva:** n
  Sea A conjunto tal que $|A| = n$, entonces:

$$|\{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva}\}| = n!$$

- **Paso Inductivo:** $n + 1$
  Sean A conjunto tal que $|A| = n + 1$. Notemos que podemos suponer que estos elementos están enumerados, es decir $A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$. Fijemos la primera evaluación para ocupar inducción, es decir:

$$\{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva}\} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva y } f(a_1) = a_i\}$$

Notemos que $X_i = \{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva y } f(a_1) = a_i\}$ es un conjunto de funciones que fijan la primera coordenada, intuitivamente nos gustaría decir que tiene la cardinalidad de $Y_i = \{f : A \setminus \{a_1\} \to B \setminus \{a_i\} \mid f \text{ es biyectiva}\}$ (pues no tenemos elección en la primera coordenada y tenemos que completar el resto con una función biyectiva que no ocupa a a_1 en la partida y a a_i en la llegada). Para demostrar esto definamos $\varphi : X_i \to Y_i$ como sigue:

$$\varphi(g) = h\ , \text{ donde } h : A \setminus \{a_1\} \to B \setminus \{a_i\} \text{ está dada por } h(x) = g(x).$$

Para ver que es biyectiva, definamos $\psi : Y_i \to X_i$:

$$\psi(g) = h\ , \text{ donde } h : A \to B \text{ está dada por } h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a_1 \\ a_i & \text{si } x = a_1 \end{cases}.$$

Veamos que son inversas, $\varphi(\psi(g)) = \varphi(h)$ donde $h : A \setminus \{a_1\} \to B \setminus \{a_i\}$ está dada por $h(x) = g(x)$. Luego $\varphi(h) = g$. $\psi(\varphi(g)) = \psi(h)$ donde $h : A \to B$ está dada por $h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a_1 \\ a_i & \text{si } x = a_1 \end{cases}$. Luego $\psi(h) = g$. Notemos que esto nos dice que φ es invertible y por tanto biyectiva. Luego por hipotesís inductiva $|Y_i| = n!$, más aún:

$$|X_i| = |Y_i| = n!$$

Por último:

$$|\{f : A \to A \mid f \text{ es biyectiva}\}| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n+1} |X_i| = \sum_{i=1}^{n+1} n! = (n+1)n! = (n+1)!$$

que era lo pedido.

P5. [Principio del Palomar]
Sea $A = [0..n]$ y considere la secuencia $(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ de elementos en A. Pruebe que existen $l, j \in \mathbb{N}$ tales que $x_l = x_j$, donde $l \neq j$.

Solución 5. Supongamos en busca de una contradicción que no existen $l, j \in \mathbb{N}$ tales que $x_l = x_j$ donde $l \neq j$, es decir todos los elementos de la secuencia son diferentes. Notemos entonces que el conjunto:

$$B = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$$

Tiene $n+2$ elementos, es decir $|B| = n+2$. Pero por otro lado $B \subseteq A$, es decir $|B| \leq |A| = n+1$ lo que es una contradicción.

P6. [Paridad]

Sean $P = \{A \subseteq [1..n] : |A| \text{ es par}\}$ y $I = \{A \subseteq [1..n] : |A| \text{ es impar}\}$.

a) Demuestre que P e I son finitos.

b) Demuestre que $|P| = |I|$.

Solución 6.

a) Como $P \subseteq \mathcal{P}([1..n])$ y $|\mathcal{P}([1..n])| = 2^n$ tenemos que $\mathcal{P}([1..n])$ es finito y por tanto P también. Como también $I \subseteq \mathcal{P}([1..n])$, concluimos de igual manera que I es finito.

b) Definamos $f : P \to I$ como:

$$f(X) = X\Delta\{1\}$$

Notemos que f siempre cambia la paridad (pues siempre agrega o quita un elemento, luego la paridad del conjunto siempre cambia), de esto se concluye que efectivamente f va de P en I. Veamos que es biyección, para esto notemos que $g : I \to P$ definida por:

$$g(X) = X\Delta\{1\}$$

Verifica que:

$$f(g(X)) = f(X\Delta\{1\}) = (X\Delta\{1\})\Delta\{1\} = X\Delta\underbrace{(\{1\}\Delta\{1\})}_{\emptyset} = X\Delta\emptyset = X$$

El otro lado es:

$$g(f(X)) = g(X\Delta\{1\}) = (X\Delta\{1\})\Delta\{1\} = X\Delta\underbrace{(\{1\}\Delta\{1\})}_{\emptyset} = X\Delta\emptyset = X$$

De donde f es invertible y por tanto biyectiva, de esto $|P| = |I|$.