MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 9 : Sumatorias

23 de mayo del 2017

P1. [Reconocer sumas conocidas]
Calcule las siguientes sumatorias:

$$a)\ \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \qquad\qquad b)\ \sum_{k=0}^{n-1}(k+nk)(k-n)$$

P2. [Acotamiento e Inducción]
Se definen los números armónicos como:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Demuestre que

$$1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$$

P3. [Cambio de Indice]

Para $m \geq 1$ calcule $\displaystyle\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$

P4. [Racionalización]
Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$.

P5. [Fracciones Parciales]
Calcule:

$$a)\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)} \qquad c)\ \sum_{i=5}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{i+1}{j(j+1)}$$

P6. [Telescópica]
Calcule:

$$a) \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \qquad b)\ \sum_{k \text{ impar}}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2+2k+1}+\sqrt[3]{k^2-1}+\sqrt[3]{k^2-2k+1}} \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k2^k}{(k+2)!} \qquad d)\ \sum_{k=1}^{n} \sin(2k)$$

P7. [Suma por casos]
Se pide calcular en función de n, el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2,$$

procediendo como se indica:

(i) Escriba la suma de los términos pares, usando $k = 2i$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(ii) Escriba la suma de los términos impares, usando $k = 2i - 1$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

P8. [Armar el teorema del Binomio]
Demuestre $\circledast$ y calcule las sumatorias:

$\circledast$ $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

b) Dado $p \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+3}(-1)^{k-3}(k-2)\binom{n+3}{k}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k(k-1)7^k}{n}\binom{n}{k}$.

P9. [Sumas multiples]

a) Calcule:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\left(k+\frac{2^j}{j}\right).$$

b) Sea $b \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$. Calcule la siguiente suma:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}b^i$$

c) Calcule:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{8^{k+1}}{3^j}$$

d) Calcule:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}k\binom{n}{k}\binom{n}{j}a^{k+j-1}$$

P10. [Reescribir]

a) Calcule la siguiente suma:

$$a + aa + aaa + aaaa + \ldots + \underbrace{aa\ldots aa}_{n \text{ a's}}$$

Donde a es un dígito.
Hint: Le puede ser útil calcular primero el caso $a = 9$.

b) Considere, para $n \in \mathbb{N}$, la suma

$$S = 1 + \frac{1+2}{3} + \frac{1+2+3}{3} + \ldots + \frac{1+2+3+\ldots+n}{n}$$

Escriba S como una sumatoria doble y calcule su valor.

P11. [Perturbación I]
Queremos calcular $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^k$ para esto calcule:

$$\sum_{k=0}^{n}k2^k + (n+1)2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^{k+1}$$

y llegue a una ecuación para $\sum_{k=0}^{n} k2^k$.

Obs: La idea de agregar el término siguiente y llegar a una ecuación se conoce como método de la perturbación

P12. [Intercambio de sumas I]

Demuestre que si a_n es una secuencia, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j:j=0 \mod i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:i \text{ divide a } j} a_{i,j}$$

Hint: Note que no puede intercambiar las sumas pues los indices no son independientes, independícelos definiendo una cantidad $c_{i,j}$ apropiada.

P13. [Perturbación II]

Definimos, para $n \geq 1$, $r \neq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^k.$$

a) Demuestre, sin usar inducción que:

$$S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}.$$

Hint: *Use cambio de índices en S_n.*

b) Pruebe, nuevamente sin uso de inducción, que:

$$S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} - nr^{n+2}}{(1-r)^2}.$$

P14. [Coeficientes]

a) Determine el valor de k si los coeficientes de x^k y de x^{k+1} en el desarrollo de $(3x+2)^{14}$ son iguales.

b) Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{17} en $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

c) Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{12} en $(1 + x^2 + x^5 + x^7)^{25}$.

P15. [Expandir y Contraer]

Argumente que:

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{j=1}^{k} \sum_{k=j}^{n} 2^k$$

Use esto para calcular la suma del lado izquierdo.

Obs: Este método de reescribir una suma como una suma doble se conoce como expandir y contraer.

P16. [Técnicas]

Calcule $\sum_{k=1}^{n} k^2$ mediante perturbación y expandir y contraer.

P17. [Intercambio de sumas II]

Demuestre que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} \binom{i}{j} 2^{i+j} 3^{i-j} = \frac{10^n - 1}{9}$$

Hint: Para demostrar lo anterior debe intercambiar las sumas. Para ello defina la cantidad

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq j \leq i \leq n-1 \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ y úsela en forma adecuada.

Recordemos:

- **Definición:**
Sea $a_0, a_1, \ldots, a_n$ una secuencia de números reales, definimos su suma desde m hasta M como:
$$\sum_{k=m}^{M} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{M-1} + a_M$$
- **Suma de unos:**
$$\sum_{k=m}^{M} 1 = M - m + 1$$
- **Homogeneidad:**
$$\sum_{k=m}^{M} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{M} a_k$$
- **Aditividad:**
$$\sum_{k=m}^{M} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{M} a_k + \sum_{k=m}^{M} b_k$$
- **Cambio de índice:**
$$\sum_{k=m}^{M} a_k = \sum_{k=m+s}^{M+s} a_{k-s}$$
- **Separación de la suma:**
$$\sum_{k=m}^{M} a_k = \sum_{k=m}^{l} a_k + \sum_{k=l+1}^{M} a_k$$
- **Suma telescópica:**
$$\sum_{k=m}^{M} a_k - a_{k+1} = a_m - a_{M+1}$$
- **Suma aritmética:**
$$\sum_{k=0}^{n} (A + kd) = A(n+1) + d\frac{n(n+1)}{2}$$
- **Suma geométrica:** (si $r \neq 1$)
$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \qquad \sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r}{r - 1}$$
- **Suma de cuadrados:**
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- **Suma de cubos:**
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$
- **Factorial:**
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$
- **Coeficiente binomial:** ($k \leq n$)
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
- **Identidad de Pascal:**
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
- **Teorema del Binomio:**
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
- **Suma doble:** Es una suma del tipo:
$$\sum_{k=0}^{n} b_k$$
donde $b_k = \sum_{j=0}^{m} a_{kj}$. Esto se escribe de manera compacta como:
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{kj}$$
De manera análoga se definen las sumas múltiples.
- **Intercambio de sumas:** Si tenemos una suma doble cuyos limites inferiores y superiores no dependen de los indices. Entonces:
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{kj} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{kj}$$
- **Suma de producto independiente:**
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_k d_j = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k\right) \left(\sum_{j=0}^{m} d_j\right)$$