

P1

a) Como $P \star Q = \text{"ni } P \text{ ni } Q"$. El único caso donde $P \star Q \equiv V$ es cuando $P \equiv F$ y $Q \equiv F$, luego la tabla de verdad es

P	Q	$P \star Q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nuevamente como es verdadero sólo cuando ambos son falsos, conjeturamos que $P \star Q = \bar{P} \wedge \bar{Q}$, en efecto

P	Q	$\bar{P} \wedge \bar{Q}$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

De donde comparando las tablas de verdad vemos que en efecto $P \star Q \equiv \bar{P} \wedge \bar{Q}$.

b) Como todas son equivalentes las haremos por método algebraico.

$$1) \quad p \star p \equiv \bar{p} \wedge \bar{p} \\ \equiv \bar{p}$$

$$2) \quad (p \star q) \star (p \star q) \overset{\text{parte 1)}}{=} \overline{(p \star q)} \\ = \overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})} \\ = \bar{\bar{p}} \vee \bar{\bar{q}} \\ = p \vee q$$

$$3) \quad (p \star p) \star (q \star q) \overset{\text{parte 1)}}{=} \bar{p} \star \bar{q} \\ = \bar{\bar{p}} \wedge \bar{\bar{q}} \\ = p \wedge q$$

P2

C.B ($n=10$)

$$n^3 = 1000 < 1024 = 2^{10} \quad \checkmark$$

H.I. (n)

$$n^3 < 2^n$$

P.I. ($n+1$)

P.D.Q.: $(n+1)^3 < 2^{n+1}$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$< 2^n + \underbrace{3n^2 + 3n + 1}_{?} \quad (*)$$

Nos gustaría que $\forall n \geq 10 \quad 3n^2 + 3n + 1 \leq 2^n$.
Mostre-moslo por inducción.

C.B ($n=10$)

$$3n^2 + 3n + 1 = 300 + 30 + 1 \leq 1024 = 2^{10} = 2^n$$

H.I. (n)

$$3n^2 + 3n + 1 \leq 2^n$$

P.I. $(n+1)$

P.D.Q. $3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 \leq 2^{n+1}$

En efecto

$$3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$$

$$= 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 + 1$$

$$= \underbrace{3n^2 + 3n + 1 + 6n + 6}_{\leq 2^n}$$

$$\leq 2^n + 6n + 6 = 2^n + \underbrace{6(n+1)}_{\leq 2^n}$$

$$= 2^{n+1}$$

si $n \geq 50$ pues en cada paso
 2^n se duplica y $6(n+1)$
aumenta en 6.

(Uno podría hacer inducción
denuevo también)

Ocupando esto en (a) tenemos

$$(n+1)^3 < 2^n + \underbrace{3n^2 + 3n + 1}_{\leq 2^n}$$

$$\leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

De donde se concluye la primera inducción.

P5]

6)

$\Rightarrow$ Hip: $A=B$

PDQ: $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

Como $A=B$ podemos reemplazar toda aparición de A por B , luego $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

$\Leftarrow$ Hip: $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

PDQ $A=B$

Supongamos en busca de una contradicción que $A \neq B$, luego $A \not\subseteq B$ o $B \not\subseteq A$. Es decir $A \setminus B \neq \emptyset$ o $B \setminus A \neq \emptyset$. Veamos ambos casos.

Caso 1 ($A \setminus B \neq \emptyset$)

Sea $x \in A \setminus B$, luego

De esto $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$ $\rightarrow$

$\{x\} \in \mathcal{P}(A)$, pero $\{x\} \notin \mathcal{P}(B)$.

Caso 2: ($B \setminus A \neq \emptyset$)

Sea $x \in B \setminus A$, luego $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$, pero $\{x\} \notin \mathcal{P}(A)$

De esto $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$ $\rightarrow$

Como en ambos casos se llega a una contradicción $A=B$.

c)

$$(A \cap B) \times (C \cap D)$$

$$= \{ (x, y) : x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D \}$$

$$= \{ (x, y) : (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D) \}$$

$$= \{ (x, y) : (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D) \}$$

$$= \{ (x, y) : (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times D \}$$

$$= \{ (x, y) : (x, y) \in [A \times C] \cap [B \times D] \}$$

$$= (A \times C) \cap (B \times D)$$

Pb1

Verificar que se cumplen las propiedades de partición.

1) $\forall r \in [0, 1) \quad A_r \neq \emptyset$:

En efecto, baste con ver que $\underbrace{r - \lfloor r \rfloor}_{=0} = r$.

Es decir $r \in A_r$, luego $A_r \neq \emptyset$.

2) $\bigcup_{r \in [0, 1)} A_r = \mathbb{R}$:

$\subseteq$ Sea $x \in \bigcup_{r \in [0, 1)} A_r$, luego existe $p \in [0, 1)$

tal que $x \in A_p$. Como $A_p \subseteq \mathbb{R}$, tenemos que

$x \in \mathbb{R}$

$\supseteq$ Sea $x \in \mathbb{R}$, y sea $p = x - \lfloor x \rfloor$, notemos que $p \in [0, 1)$, luego $x \in A_p$ y por tanto

$$x \in A_p \subseteq \bigcup_{r \in [0, 1)} A_r.$$

3) Si $p \neq r$, entonces $A_p \cap A_r = \emptyset$:

Supongamos que no, es decir hay $p \neq r$ tal
que $A_p \cap A_r \neq \emptyset$. Sea $x \in A_p \cap A_r$, luego

por def. de A_p

$$x - \lfloor x \rfloor = p$$

↳ por def. de A_r

$$x - \lfloor x \rfloor = r$$

igualando tenemos que $r = p \rightarrow$

Como $\mathcal{P}$ satisface las prop. de partición, $\mathcal{P}$
es partición.

P7

a) Basta con ver que satisfacen la def. de los
elementos de $\mathcal{F}_A$. ($x \in \mathcal{F}_A \Leftrightarrow x \subseteq U, x \cap A \neq \emptyset$)

1) Como $U \subseteq U$ y $U \cap A = A \neq \emptyset$, $U \in \mathcal{F}_A$.

2) Como $A \subseteq U$ y $A \cap A = A \neq \emptyset$, $A \in \mathcal{F}_A$.

b) Hip: $A \setminus B \neq \emptyset$

PDQ: $B^c \in \mathcal{F}_A$ ($\overset{\text{util}}{\Leftrightarrow} B^c \subseteq U, A \cap B^c \neq \emptyset$).

Notemos que $B^c \subseteq U$, falta ver que $A \cap B^c \neq \emptyset$,

en efecto

$$A \cap B^c = A \setminus B \neq \emptyset.$$

$\xrightarrow{\text{Hip.}}$

wey $B^c \in \mathcal{F}_A$.

c) Hip $B \in \mathcal{F}_A, C \subseteq U$

PDQ: $(B \cup C) \in \mathcal{F}_A$ ($\overset{\text{util}}{\Leftrightarrow} B \cup C \subseteq U$ y $(B \cup C) \cap A \neq \emptyset$)

Notamos que $B \cup C \in \mathcal{U}$. Además

$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$$

Como $B \cap A \neq \emptyset$, $\exists x \in B \cap A$, luego $x \in (B \cap A) \cup (C \cap A)$.

Por tanto $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) \neq \emptyset$.

Es decir $B \cup C \in \mathcal{F}_A$.

Pg

a) Como $\text{Dom}(g) = \text{Dom}(h)$ y $\text{Rec}(g) = \text{Rec}(h)$
basta con ver que $\forall x \in B, g(x) = h(x)$.
Sea entonces $x \in B$, como f es sobreyectiva,
existe $y \in A$ tal que $f(y) = x$.

Luego:

$$g(x) = g(f(y))$$

$$= g \circ f(y)$$

$$= h \circ f(y)$$

$$= h(f(y))$$

$$= h(x)$$

Hipótesis: $g \circ f = h \circ f$

De donde se concluye.

b) Notemos que si B tiene sólo un elemento
 f es sobre. Supongamos que B tiene al menos
dos elementos distintos.

Sean $a, b \in C$ dos elementos diferentes.

Supongamos en busca de contradicción que
 $\exists y \in B \quad \nexists x \in A \quad f(x) = y$ (i.e., f no es sobre)

Definamos $\forall x \in B$.

$$g(x) = \begin{cases} b & \text{si } x = y \\ a & \text{si } x \neq y \end{cases} \quad h(x) = a$$

Notemos que como $f(x) \neq y \quad \forall x \in A$.

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(\underbrace{f(x)}_{\neq y}) \\ &= a. \end{aligned}$$

Además

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = a$$

Luego $g \circ f = h \circ f$ pero $g \neq h$

Esto es una contradicción.

Luego f es sobre.

Pro

a)

$\subseteq$ Sea $y \in f(f^{-1}(Y))$. Como $y \in f(f^{-1}(Y))$,
 $y = f(x)$, $x \in f^{-1}(Y)$.

Como $x \in f^{-1}(Y)$, tenemos que $f(x) \in Y$.

Por último $y = f(x) \in Y$. Es decir $y \in Y$.

$\supseteq$ Sea $y \in Y$. Como f es sobreyectiva,
 $\exists x \in A$ tq. $f(x) = y$.

Notemos que como $f(x) = y \in Y$, $x \in f^{-1}(Y)$.

Luego

$y = f(x)$, $x \in f^{-1}(Y)$.

Es decir $y \in f(f^{-1}(Y))$.

b). $\Leftarrow$ Hip f sobre.
PDA $\nrightarrow$ sobre.

Sea $Y \in \mathcal{P}(B)$, buscaremos $X \in \mathcal{P}(A)$ tq. $f(X) = Y$.

Sea $X = f^{-1}(Y)$, luego

$$\begin{aligned}
 F(x) &= F(f^{-1}(Y)) \\
 &= f(f^{-1}(Y)) \\
 &= Y.
 \end{aligned}
 \quad \downarrow \text{ parte a) }$$

que era lo pedido.

$\Leftarrow$ Si F es sobre $\forall Y \in \mathcal{P}(B) \exists X \in \mathcal{P}(A)$
 tq $F(X) = Y$. Tomemos $Y = B$, luego $\exists X \in \mathcal{P}(A)$
 tal que:

$$F(X) = B, \text{ es decir } f(X) = B.$$

Luego como $f(X) \subseteq f(A)$, tenemos que

$B \subseteq f(A)$. Además $f(A) \subseteq B$ (siempre la imagen es $\subseteq$ del codom!). Luego $f(A) = B$

y por tanto f es sobre. $\left(\begin{array}{l} f: A \rightarrow B \text{ sobre} \\ \Leftrightarrow f(A) = B \end{array} \right)$

P11)

b) Como E_1 y E_2 tienen tamaño al menos 2, existen $a, b \in E_1$ y $c, d \in E_2$, como los ordenes son totales podemos suponer que $a R_1 b$ y $c R_2 d$. Notemos que

$$(a, d) \not R (b, c) \quad \text{y} \quad (b, c) \not R (a, d)$$

Luego el orden R no es total.

P13)

b) $\exists$ Como $\{[X]_R : X \in \mathcal{P}(A)\}$ es un conjunto de clases de eq. el subconjunto de $\mathcal{P}(E) / R \leftarrow (\text{todas las clases de eq.})$

$$\subseteq \text{ Sea } [X]_R \in \mathcal{P}(E) / R.$$

Notemos que $X R (X \cap A)$. puer.

$$X R (X \cap A) \Leftrightarrow A \cap X = A \cap X \cap A \Leftrightarrow V.$$

luego

$$[X]_R = [X \cap A]_R \in \{[X]_R : X \in \mathcal{P}(A)\}.$$

c) Sean $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ tal que $X \neq Y$.

Veamos que $[X]_{\mathcal{R}} \neq [Y]_{\mathcal{R}}$. Basta con
ver que $X \not\mathcal{R} Y$. Supongamos que si,
es decir que $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$.

Como $X \subseteq A$, $A \cap X = X$.

Como $Y \subseteq A$, $A \cap Y = Y$.

Luego $X = A \cap X = A \cap Y = Y$ 

Por tanto $X \not\mathcal{R} Y$ y $[X]_{\mathcal{R}} \neq [Y]_{\mathcal{R}}$.