MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 7 : Relaciones

4 de mayo del 2017

P1. [Varios]

a) Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$.

(i) Determine si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia o de orden (podría no ser ninguna de las dos)

(ii) Si la relación es de equivalencia, calcule todas las clases de equivalencia. Si es de orden determine si el orden es parcial o total.

b) Sea E un conjunto no vacío y considere $K \in \mathcal{P}(E)$ fijo, con $K \neq \varnothing$.
Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ por:

$$A\mathcal{R}_K B \Leftrightarrow B \cap K \subseteq A.$$

(i) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.

(ii) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es de orden si y sólo si $K = E$.

Solución 1.

a) 1) Demostremos $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva. Consideremos x, y, z en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- **Refleja:** Es claro que $x^2 > 0$ y por tanto $x\mathcal{R}x$.
- **Simétrica:** Supongamos $x\mathcal{R}y$, entonces $xy > 0$ y en consecuencia $yx > 0$, por ende $y\mathcal{R}x$.
- **Transitiva:** Supongamos $x\mathcal{R}y$ y que $y\mathcal{R}z$. Es decir $xy > 0$ y $yz > 0$. Multiplicando ambas tenemos:

$$\begin{array}{rcll} xy^2z & > & 0 & / : y^2 \\ xz & > & 0 & \end{array}$$

De esto concluimos que $x\mathcal{R}z$.

2) Notemos primero que:

$$[1]_{\mathcal{R}} = \mathbb{R}^+ \qquad [-1]_{\mathcal{R}} = \mathbb{R}^-$$

Y por tanto $[1]_{\mathcal{R}} \cup [-1]_{\mathcal{R}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $[1]_{\mathcal{R}} \cap [-1]_{\mathcal{R}} = \emptyset$. Luego $\{[1]_{\mathcal{R}}, [-1]_{\mathcal{R}}\}$ es una partición por clases de equivalencia del conjunto original, es decir

$$\{[1]_{\mathcal{R}}, [-1]_{\mathcal{R}}\} = (\mathbb{R} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$$

1) - $\mathcal{R}_K$ **refleja**: Recordemos que, para todo $A \in \mathcal{P}(E)$,

$$A \cap K \subseteq A \implies A\mathcal{R}_K A.$$

- $\mathcal{R}_K$ **transitiva**: Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ tales que $A\mathcal{R}_K B \wedge B\mathcal{R}_K C$, luego:

$$A\mathcal{R}_K B \wedge B\mathcal{R}_K C \iff B \cap K \subseteq A \wedge C \cap K \subseteq B,$$

de donde vemos que

$$C \cap K \subseteq B \implies (C \cap K) \cap K \subseteq B \cap K \iff C \cap K \subseteq B \cap K \subseteq A,$$

de donde deducimos que $C \cap K \subseteq A \iff A\mathcal{R}_K C$.

2)
- ($\Longleftarrow$)
  Si $K = E$, notamos que la relación $A\mathcal{R}_E B$ toma la forma:
  $$A\mathcal{R}_E B \iff A \cap E \subseteq B \iff A \subseteq B.$$
  Luego, como ahora la relación queda determinada por la inclusión de conjuntos, veamos que es antisimétrica. En efecto, sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tales que $A\mathcal{R}_E B \wedge B\mathcal{R}_E A$; por definición esto nos dice que
  $$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B,$$
  por lo que nuestra relación queda antisimétrica para $K = E$, y por lo demostrado anteriormente resulta ser una relación de orden en $\mathcal{P}(E)$.
- ($\Longrightarrow$)
  Si $\mathcal{R}_K$ es de orden, entonces es antisimétrica, esto es que $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E)$:
  $$X \cap K \subseteq Y \iff X\mathcal{R}_K Y \implies Y\mathcal{R}_K X \iff Y \cap K \subseteq X$$
  Esto vale para todo X, Y, luego como $E \cap K \subseteq K$ aplicando la propiedad anterior vemos que $K \cap K \subseteq E$ y por tanto $K \subseteq E$. Como además $E \subseteq K$ concluimos que $K = E$.

P2. [Módulo]
Sea $\mathcal{R}$ la siguiente relación en $\mathbb{Z}^2$ definida por:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a+b \equiv_2 c+3d$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Demuestre que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}^2$, pero que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

c) ¿Cuántos elementos tiene $\mathbb{Z}^2/\mathcal{R}$?

Solución 2. Recordemos que la relación $\equiv_2$ en $\mathbb{Z}$:

$$x \equiv_2 y \iff [\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } (x-y) = 2k]$$

Esto puede ser visto como que x e y tienen la misma paridad. En el caso de $\mathcal{R}$ notemos que:

$$\begin{aligned}
(a,b)\mathcal{R}(c,d) &\iff a+b \equiv_2 c+3d \\
&\iff [\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } c+3d-a-b = 2k] \\
&\iff [\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } c+d-a-b = 2(\underbrace{k-d}_{\lambda})] \\
&\iff [\exists \lambda \in \mathbb{Z} \text{ tal que } c+d-a-b = 2\lambda] \\
&\iff a+b \equiv_2 c+d
\end{aligned}$$

Es decir $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ si y sólo si $a+b$ y $c+d$ tienen la misma paridad.

a)
- **Refleja:** $a+b$ tiene la misma paridad que $a+b$, por ende $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$
- **Simétrica:** Supongamos $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$, Es decir $a+b$ tiene la misma paridad que $c+d$, esto es lo mismo que $c+d$ tenga la misma paridad que $a+b$, luego $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.
- **Transitiva:** Supongamos $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ y que $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$. Es decir $a+b$ tiene la misma paridad que $c+d$ y $c+d$ tiene la misma paridad que $e+f$. Es evidente de esto que $a+b$ tiene la misma paridad que $e+f$, por lo tanto:
$$(a,b)\mathcal{R}(e,f)$$

b) Sea $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, luego $a+b$ es par o impar. Si $a+b$ es par, entonces $a+b \in [(0,0)]_{\mathcal{R}}$, mientras que si $a+b$ es impar tenemos que $a+b \in [(1,0)]_{\mathcal{R}}$. De esto concluimos que:

$$[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}^2$$

Además es claro que no existe ningún $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $a+b$ sera par e impar a la vez, por tanto:

$$[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$$

c) Por la parte *b*) vemos que $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$ son una partición por clases de $\mathcal{R}$ de $\mathbb{Z}^2$ por tanto son todas las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$. De esto concluimos que $\mathbb{Z}^2/\mathcal{R}$ tiene 2 elementos.

P3. [Orden de los divisores]
Sea D_n el conjunto de todos los divisores de n. Definimos la relación $|$ como:

$$a|b \iff a \text{ divide a } b$$

a) Demuestre que $|$ es una relación de orden en D_n.

b) Demuestre que $|$ es un orden total en D_n si y sólo si $n = p^k$ donde p es un primo y $k \in \mathbb{N}$.

Solución 3. Antes de comenzar la pregunta aclarar que se refieren a una noción de divisibilidad "natural" y no "entera", es decir la relación de equivalencia debiese estar definida por:

$$a|b \iff \exists k \in \mathbb{N}, b = ak$$

a)
- **Refleja:** En efecto:
$$a = 1 \cdot a \in \mathbb{N}$$
Por tanto $a|a$.
- **Antisimétrica:** Supongamos que $a|b$ y que $b|a$ luego existe $k, j \in \mathbb{N}$:
$$b = ja \qquad a = kb$$
Reemplazando las ecuaciones y notando que $a \neq 0$ tenemos que:
$$a = kja \implies kj = 1$$
Luego j es un entero de la forma $\frac{1}{k}$ por tanto $j = 1$. Reemplazando j tenemos que $a = b$.
- **Transitiva:** Supongamos $a|b$ y que $b|c$. Es decir tenemos que existen $j, k \in \mathbb{N}$ tal que
$$b = ja \qquad c = kb$$
Reemplazando tenemos:
$$c = kja$$
Que implica que $a|c$.

b) Demostremos cada implicancia por separado.

($\Longleftarrow$) Notemos que si $n = p^k$, entonces:
$$D_{p^k} = \{p^i : 0 \leq i \leq k\}$$
Puesto que los únicos que dividen a n son las potencias de p. Sean entonces $x, y \in D_{p^k}$ mostremos que son comparables, por lo anterior sabemos que $x = p^a$, $y = p^b$ donde $0 \leq a, b \leq k$ luego:
$$x = p^{a-b}y \qquad\qquad y = p^{b-a}x$$
Como $a - b$ o $b - a$ es positivo, entonces $p^{a-b} \in \mathbb{N}$ o $p^{b-a} \in \mathbb{N}$, esto implica que $x|y$ o que $y|x$. Como todos los elementos son comparables, el orden es total.

($\Longrightarrow$) Demostraremos la contrarrecíproca, es decir:
$$\overline{(n = p^k \text{ donde } p \text{ es un primo y } k \in \mathbb{N})} \implies (| \text{ no es un orden total en } D_n)$$
Notemos que si n no es una potencia de un primo, entonces n se puede expresar como el producto de al menos dos primos distintos. Es decir:
$$n = pqr$$
Donde p y q son primos distintos y r es un natural. Luego como $p|n$ entonces $p \in D_n$, de manera similar como $q|n$ entonces $q \in D_n$, por último notemos que $p \nmid q$ y que $q \nmid p$ pues ambos son primos. Como existen dos elementos que no son comparables, el orden no es total.

P4. [Fibras]
Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \to B$ una función. Definimos la relación de equivalencia $\sim$ en A como:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

a) Explique como es el conjunto $A/\sim$ ¿Que pasa si f es inyectiva?.

b) Demuestre que $\tilde{f} : (A/\sim) \to B$ definida por:

$$\tilde{f}([a]) = f(a)$$

esta bien definida (i.e. da lo mismo cual representante de $[a]$ tomar) y es inyectiva.

c) Demuestre que $f^* : A \to (A/\sim)$ como:

$$f^*(x) = [x]$$

es sobreyectiva.

d) Demuestre que $f = \tilde{f} \circ f^*$.

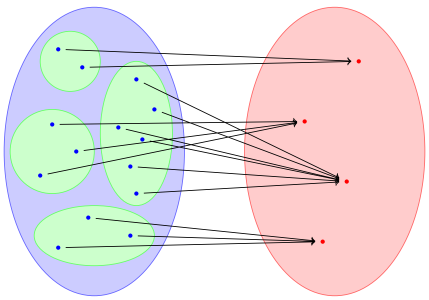

Figura 1: Las clases de equivalencia estan marcadas en verde.

Solución 4.

a) Las clases de equivalencia son todos los elementos que al pasar por f van al mismo punto, es decir se ven como en la figura 2. Si f es inyectiva las clases de equivalencia contienen un elemento.

b) Veamos que esta bien definida, sean $x, y \in A$ tal que $[x] = [y]$ (es decir $x \sim y$), luego:

$$\tilde{f}([x]) = f(x) = f(y) = \tilde{f}([y])$$

Es decir da lo mismo cual representante de la clase de equivalencia tomar. Veamos además que es inyectiva, sean $[x], [y] \in (A/\sim)$ tal que $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([y])$, luego:

$$\begin{aligned} \tilde{f}([x]) &= \tilde{f}([y]) \\ f(x) &= f(y) \end{aligned}$$

Por tanto $x \sim y$, y por tanto $[x] = [y]$.

c) Sea $[x] \in (A/\sim)$, notemos que tomando $x \in [x]$ tenemos:

$$f^*(x) = [x]$$

Como $[x]$ era arbitrario, entonces f^* es sobreyectiva.

d) Como el dominio y el recorrido de las funciones coincide solo basta chequear que coinciden para todo $a \in A$:

$$(\tilde{f} \circ f^*)(a) = \tilde{f}(f^*(a)) = \tilde{f}([a]) = f(a)$$

con esto concluimos que $f = \tilde{f} \circ f^*$.

P5. [Relaciones de proposiciones lógicas]
Sobre un conjunto de proposiciones lógicas $\mathcal{P}$, se define la relación $\mathcal{R}$ por:

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow q).$$

Además, para $p, q \in \mathcal{P}$ se dice que $p = q$ si y sólo si $p \Leftrightarrow q$.

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de orden sobre $\mathcal{P}$.

b) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total.

Solución 5.

a) Demostremos que $\mathcal{R}$ es refleja, antisimétrica y transitiva. Consideremos $p, q \in \mathcal{P}$

- **Refleja:** Notemos que

$$(p \wedge p) \iff p$$

Por tanto $p\mathcal{R}p$.

- **Antisimétrica:** Supongamos $p\mathcal{R}q$ y que $q\mathcal{R}p$, entonces tenemos que:

$$(p \wedge q) \iff q \quad \text{ y que } \quad (q \wedge p) \iff p$$

Juntando ambas proposiciones obtenemos $p \iff q$. Luego si $p = V$, entonces $q = V$ analogamente si $p = F$ entonces $q = F$. Concluimos que $p = q$.

- **Transitiva:** Supongamos $p\mathcal{R}q$ y que $q\mathcal{R}r$. Es decir tenemos que

$$\underbrace{(p \wedge q) \iff q}_{(1)} \quad \text{ y que } \quad \underbrace{(q \wedge r) \iff r}_{(2)}$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$(p \wedge q \wedge r) \iff r$$

Recordando que $(q \wedge r) \iff r$ tenemos que:

$$(p \wedge r) \iff r$$

Es decir $p\mathcal{R}r$.

b) Notemos que como las proposiciones son verdaderas o falsas basta con chequear casos, notemos que como son pocos lo podemos chequear uno a uno. Notemos que como $V\mathcal{R}V$ y $F\mathcal{R}F$ por reflexividad solo resta chequear que $F\mathcal{R}V$ o que $V\mathcal{R}F$. En efecto esta última es verdadera pues:

$$V\mathcal{R}F \equiv [(V \wedge F) \iff F] \equiv [F \iff F] \equiv V$$

Luego como todos los elementos son comparables, el orden es total.