MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 5 : Conjuntos y Funciones

20 de abril del 2017

P2. [Varios]

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

Demuestre que f es inyectiva.

b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función *estrictamente monótona*, es decir, una función tal que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad x < y \implies g(x) < g(y)$$

Demuestre que g es inyectiva. Demuestre mediante un contraejemplo que g no necesariamente es sobreyectiva.

c) Sea $h : (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$h(x) = \frac{2x}{x+1}$$

Demuestre que h es inyectiva, pero no es sobreyectiva.

d) Sea $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ una función definida por $\varphi(X) = X^c$. Demuestre que φ es biyectiva y encuentre φ^{-1}.

Solución 1.

a) Para probar inyectividad, consideremos $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(y)$. Luego,

$$0 = |f(x) - f(y)| = |x = y|$$

de donde concluimos que $x = y$, probando la inyectividad.

b) Para esta parte consideremos $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, y probemos que $g(x) \neq g(y)$. En efecto, como $x \neq y$ necesariamente uno será mayor que el otro. Asumamos, por ejemplo, que $x < y$. Luego,

$$x < y \Rightarrow g(x) < g(y)$$

Como $g(x) < g(y)$, en particular $g(x) \neq g(y)$, concluyendo lo pedido. El caso $y < x$ es análogo. Para ver el contraejemplo basta con notrar que e^x es estrictamente monotona pero no sobreyectiva.

c)
- **Inyectividad:** Sean $a, b \in (\mathbb{R} \setminus \{-1\})$ tal que $g(a) = g(b)$. Luego:

$$\begin{aligned} g(a) &= g(b) \\ \tfrac{2a}{a+1} &= \tfrac{2b}{b+1} \\ 2a(b+1) &= 2b(a+1) \\ 2ab + 2a &= 2ba + 2b \\ 2a &= 2b \\ a &= b \end{aligned}$$

Por tanto g es inyectiva.

- **No sobreyectividad:** Supongamos en busca de una contradicción que todo $y \in \mathbb{R}$ se puede escribir como $y = g(a)$. Luego:

$$\begin{array}{rcl} y & = & g(a) \\ y & = & \frac{2a}{a+1} \\ ya + y & = & 2a \\ y & = & a(2-y) \end{array}$$

Notemos que la expresión anterior es valida $\forall y \in \mathbb{R}$, en particular para $y = 2$. Reemplazando:

$$2 = a \cdot 0 = 0$$

Lo que es una contradicción.

d)

- **Inyectividad**: Sean $X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que $\varphi(X) = \varphi(Y)$. En efecto:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(X) & = & \varphi(Y) \\ X^c & = & Y^c \\ X & = & Y \end{array}$$

concluyendo la inyectividad.

- **Sobreyectividad**: Sea $Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Queremos encontrar $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que $\varphi(X) = Y$. Si tomamos como candidato a $X = Y^c$, notamos que:

$$\varphi(X) = \varphi(Y^c) = (Y^c)^c = Y$$

Como esto es valido $\forall Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, se concluye que φ es sobreyectiva, y luego es biyectiva.

- **Inversa** Tomamos como candidato a inversa a φ, es decir, la función es su propia inversa pues notamos que

$$\varphi(Y) = Y^c = X \Leftrightarrow \varphi(X) = X^c = Y$$

,
cumpliendo la definición de inversa.

P3. [Funciones sobre conjuntos]

a) Sea $\mathcal{U} \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$ por $f(X, Y) = X \backslash Y$ para cada $(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Estudie la inyectividad y sobreyectividad de f.

b) Sean A, B dos conjuntos fijos cualquiera. Definimos $\mathcal{F} : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A \cup B)$ como:

$$F(X, Y) = X \cup Y$$

Solución 2.

a)
- **No Inyectividad**: Notemos que la función no es inyectiva, pues basta tomar $(U, U), (\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U})$, de donde se obtiene que

$$f(U, U) = U \setminus U = \emptyset = \emptyset \backslash \emptyset = f(\emptyset, \emptyset)$$

por lo que f no puede ser inyectiva.
- **Sobreyectividad**: Queremos, dado $Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, encontrar un elemento en $\mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U})$ cuya imagen sea Y. En efecto, notemos que podemos tomar, por ejemplo $(Y, \emptyset) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U})$ que cumple

$$f(Y, \emptyset) = Y \backslash \emptyset = Y$$

Por lo tanto la función es sobreyectiva.

b) (i) Sea $Z \in \mathcal{P}(A \cup B)$ queremos encontrar un $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ tal que $F(X, Y) = Z$. Tomemos $(X, Y) = (Z \cap A, Z \cap B)$, veamos que se verifica $F(X, Y) = Z$

$$F(X, Y) = F(Z \cap A, Z \cap B) = (Z \cap A) \cup (Z \cap B) = Z \cap (A \cup B) = Z$$

Donde la última igualdad se verifica pues $Z \subseteq A \cup B$.

(ii) Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) tal que $F(X_1, Y_1) = F(X_2, Y_2)$ queremos probar que F es inyectiva (es decir que $(X_1, Y_1) = (X_2, Y_2)$). Veamos que esto pasa:

$$\begin{gathered} F(X_1, Y_1) = F(X_2, Y_2) \\ X_1 \cup Y_1 = X_2 \cup Y_2 \\ (X_1 \cup Y_1) \cap A = (X_2 \cup Y_2) \cap A \\ (X_1 \cap A) \cup (Y_1 \cap A) = (X_2 \cap A) \cup (Y_2 \cap A) \end{gathered}$$

Como $X_1, X_2 \subseteq A$, entonces $X_1 \cap A = X_1$ y $X_2 \cap A = X_2$. Además como $A \cap B = \emptyset$, $Y_1 \subseteq B$ y $Y_2 \subseteq B$ tenemos que $Y_1 \cap A = \emptyset$ e $Y_2 \cap A = \emptyset$. Aplicando todo esto a la ecuación anterior concluimos que:

$$X_1 \cup \emptyset = X_2 \cup \emptyset \implies X_1 = X_2$$

Veamos que pasa cuando intersectamos con B:

$$\begin{gathered} (X_1 \cup Y_1) \cap B = (X_2 \cup Y_2) \cap B \\ (X_1 \cap B) \cup (Y_1 \cap B) = (X_2 \cap B) \cup (Y_2 \cap B) \end{gathered}$$

De manera análoga a lo anterior como $Y_1, Y_2 \subseteq B$, entonces $Y_1 \cap B = Y_1$ y $Y_2 \cap B = Y_2$. Además como $A \cap B = \emptyset$, $X_1, X_2 \subseteq B$ tenemos que $X_1 \cap B = \emptyset$ y $X_2 \cap B = \emptyset$. Aplicando todo esto a la ecuación anterior concluimos que:

$$\emptyset \cup Y_1 = \emptyset \cup Y_2 \implies Y_1 = Y_2$$

(iii) De las partes anteriores sabemos que la función F es biyectiva bajo la condición $A \cap B = \emptyset$. Nuestro candidato a inversa será $F^{-1}(Z) = (Z \cap A, Z \cap B)$ (esto viene de la demostración de sobreyectividad), notemos que:

$$F^{-1}(Z) = (Z \cap A, Z \cap B) \iff F(Z \cap A, Z \cap B) = Z$$

De esto se concluye que F^{-1} es la inversa de F.

P4. [Una función aditiva]

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una que $\forall n, m$ satisface:

$$f(n+m) = f(n) + f(m)$$

Demuestre que:

a) $f(0) = 0$.

b) $f(mn) = mf(n) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$.

c) f es inyectiva si y sólo si:

$$f(x) = 0 \implies x = 0$$

d) f es biyectiva si y sólo si $f(n) = n$.

Obs : Esto último implica que la única función aditiva y biyectiva de $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{N}$ *es la identidad.*

Solución 3.

a) Como la función es aditiva, se tiene:

$$\begin{aligned} f(n+0) &= f(n) + f(0) \\ f(n) &= f(n) + f(0) \\ 0 &= f(0) \end{aligned}$$

b) Nuevamente de la aditividad tenemos:

$$\begin{aligned} f(mn) &= f(\underbrace{n+n+\cdots+n}_{m \text{ veces}}) \\ &= f(n) + f(\underbrace{n+n+\cdots+n}_{m-1 \text{ veces}}) \\ &= f(n) + f(n) + f(\underbrace{n+n+\cdots+n}_{m-2 \text{ veces}}) \\ &\vdots \\ &= \underbrace{f(n)+f(n)+\ldots f(n)}_{m \text{ veces}} \\ &= mf(n) \end{aligned}$$

Obs: esto se puede formalizar haciendo inducción en n*.*

c)
- $(\implies)$
  Sea x tal que $f(x) = 0$, demostremos que $x = 0$. Por la parte *a*) sabemos que $f(0) = 0$, luego tenemos que $f(x) = f(0)$. Utilizando la hipótesis de que f es inyectiva tenemos que $f(x) = f(0)$ implica que $x = 0$. De esto concluimos que:

  $$f(x) = 0 \implies x = 0$$

  que era lo pedido.
- $(\impliedby)$
  Supongamos ahora que $f(z) = 0 \implies z = 0$, queremos probar que f es inyectiva. Sean $x, y \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = f(y)$, luego:

  $$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ f(x \cdot 1) &= f(y \cdot 1) && \text{/parte b)} \\ xf(1) &= yf(1) \end{aligned}$$

Notemos que la hipótesis nos dice que $z \neq 0 \implies f(z) \neq 0$, es decir nos dice que $f(1) \neq 0$. Luego podemos divir por $f(1)$, es decir:

$$xf(1) = yf(1) \implies x = y$$

De donde se concluye la inyectividad de f.

d) Demostremos ambas implicancias.

$(\Longleftarrow)$ Demostremos que $f(n) = n$ es biyectiva. Es claro que esta es sobreyectiva, veamos la inyectividad. Sean x, y tales que $f(x) = f(y)$, luego:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ x &= y \end{aligned}$$

Por tanto f es biyectiva.

$(\Longrightarrow)$ Notemos que si lograramos demostrar que $f(1) = 1$ entonces, por la propiedad demostrada en *b*) concluiriamos que $f(n) = n$, mostremos entonces que $f(1) = 1$. Como f es sobreyectiva, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = 1$, por inyectividad sabemos que $x \neq 0$, luego:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ f(1) &= \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

Como $f(1)$ es un natural, tenemos que $x = 1$, por ende $f(1) = 1$.