MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 4 : Teoría de Conjuntos

13 de abril del 2017

P1. [Varios]
Sean A, B, X subconjuntos de un universo $\mathcal{U}$. Demuestre que:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

b) $(A \cap B) \cup X = A \cap (B \cup X) \iff X \subseteq A$

c) $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X)$

Solución 1.

a) Demostraremos por doble inclusión, es decir mostraremos que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ y que $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

- $(\subseteq)$
Sea $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, luego $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$. Queremos probar que $X \subseteq A \cap B$, en efecto sea $x \in X$, como $X \subseteq A$, entonces $x \in A$, de la misma manera como $X \subseteq B$ tenemos que $x \in B$, por tanto $x \in A \cap B$ y $X \subseteq A \cap B$. Como $X \subseteq A \cap B$, entonces $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$, concluimos que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.
- $(\supseteq)$
Sea $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$, luego $X \subseteq A \cap B$. Como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, entonces $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$, es decir $X \in \mathcal{P}(A)$ y $X \in \mathcal{P}(B)$. Por tanto $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, como X era arbitrario concluimos que $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

b) Demostraremos cada implicancia por separado:

- $(\implies)$
Sea $x \in X$, como $X \subseteq (A \cap B) \cup X$ tenemos que:
$$x \in (A \cap B) \cup X = A \cap (B \cup X)$$
es decir $x \in A$ y $x \in (B \cup X)$, en particular $x \in A$.
- $(\impliedby)$
$$\begin{aligned} A \cap (B \cup X) &= (A \cap B) \cup \underbrace{(A \cap X)}_{X} \\ &= (A \cap B) \cup X \end{aligned}$$
Donde se ocupó el hecho de que como $X \subseteq A$, entonces $A \cap X = X$.

c) Veamoslo por definición:
$$\begin{aligned} (A \cup B) \times X &= \{(a, x) : a \in A \cup B \wedge x \in X\} \\ &= \{(a, x) : (a \in A \vee a \in B) \wedge x \in X\} \\ &= \{(a, x) : (a \in A \wedge x \in X) \vee (a \in B \wedge x \in X)\} \\ &= \{(a, x) : a \in A \wedge x \in X\} \cup \{(a, x) : a \in B \wedge x \in X\} \\ &= A \times X \cup B \times X \end{aligned}$$

P2. [Álgebra de Conjuntos]
Sean A, B, C y D conjuntos. Demuestre las siguientes igualdades:

a) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

b) $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [B \setminus (A \setminus B)] = A \cup B$

Solución 2.

a)

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^c \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

b) Partamos del lado con más información.

$$\begin{aligned} [A \setminus (B \setminus A)] \cup [B \setminus (A \setminus B)] &= [A \cap (B \setminus A)^c] \cup [B \cap (A \setminus B)^c] \\ &= [A \cap (B \cap A^c)^c] \cup [B \cap (A \cap B^c)^c] \\ &= \underbrace{[A \cap (B^c \cup A)]}_{A} \cup \underbrace{[B \cap (A^c \cup B)]}_{B} \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

Donde el último paso se justifca pues $A \subseteq (B^c \cup A)$, luego $A \cap (B^c \cup A) = A$, de manera analoga $B \subseteq (A^c \cup B)$.

P3. [Diferencia Simétrica]
Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

a) Demuestre la *propiedad cancelativa* de la diferencia simetrica, es decir:

$$A \triangle B = A \triangle C \implies B = C$$

b) Use lo anterior para demostrar que:

$$B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \iff A = \emptyset$$

c) Use la propiedad cancelativa para demostrar que $\forall X, Y \subseteq \mathcal{U}$ se tiene la siguiente propiedad:

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \implies X = Y$$

donde $A \subseteq \mathcal{U}$ es un conjunto fijo.

Solución 3.

a) Recordemos que la diferencia simétrica es asociativa:

$$\begin{aligned}
& & A\triangle B &= A\triangle C & & /A\triangle \\
&\implies & A\triangle(A\triangle B) &= A\triangle(A\triangle C) & & /\text{Asociatividad de } \triangle \\
&\implies & \underbrace{(A\triangle A)}_{\emptyset}\triangle B &= \underbrace{(A\triangle A)}_{\emptyset}\triangle C & & \\
&\implies & \underbrace{\emptyset\triangle B}_{B} &= \underbrace{\emptyset\triangle C}_{C} & & \\
&\implies & B &= C & &
\end{aligned}$$

b) Demostremos las implicancias por separado.

- $(\impliedby)$
  Tenemos como hipótesis que $A = \emptyset$, luego:

$$\begin{aligned}
(A \cap B^c) \cup (A^{\cap} B) &= (\emptyset \cap B^c) \cup (\mathcal{U} \cap B) \\
&= \emptyset \cup B \\
&= B
\end{aligned}$$

- $(\implies)$
  Tenemos como hipótesis que $B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A\triangle B$. Notando que $B = \emptyset\triangle B$, tenemos:

$$\emptyset\triangle B = A\triangle B \underbrace{\implies}_{\text{Prop. Cancelativa}} \emptyset = A$$

c) Como nos piden usar la propiedad cancelativa, basta con mostrar que $X\triangle A = Y\triangle A$ y mediante la propiedad cancelativa concluiremos que $X = Y$. Nuestra hipótesis nos dice que $(X \cup A) = (Y \cup A)$ y $(X \cap A) = (Y \cap A)$, entonces:

$$\begin{aligned}
X\triangle A &= (X \cup A) \setminus (X \cap A) \\
&= (Y \cup A) \setminus (Y \cap A) \\
&= Y\triangle A
\end{aligned}$$

Mediante la propiedad cancelativa se concluye que $X = Y$.

P4. [Conjunto Potencia]
Sean A y B subconjuntos de un universo $\mathcal{U}$. Demuestre que:

a) $A \cap B = \emptyset \iff \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

b) $[\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)] \iff [A \subseteq B \vee B \subseteq A]$.

Solución 4.

a)

- $(\implies)$
  Tenemos como hipótesis que $A \cap B = \emptyset$. Ocupando la **P1** *a)* tenemos que:

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(\underbrace{A \cap B}_{\emptyset}) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

- $(\impliedby)$
  Queremos demostrar que:

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\} \implies A \cap B = \{\emptyset\}$$

  Por contrarrecíproca esto es lo mismo que demostrar que:

$$A \cap B \neq \emptyset \implies \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \neq \{\emptyset\}$$

  Demostremos esto último. Como $A \cap B \neq \emptyset$ tenemos que $\exists x \in A \cap B$, luego:

$$\{x\} \subseteq A \qquad \{x\} \subseteq B$$

  Por tanto $\{x\} \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, es decir $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \neq \{\emptyset\}$.

b)

- $(\impliedby)$
  Supongamos que $A \subseteq B$ (el caso cuando $B \subseteq A$) es analogo. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$, por tanto $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(B)$. En efecto si $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$:

$$\begin{aligned} &\implies & X \subseteq A \subseteq B \vee X \subseteq B \\ &\implies & X \subseteq B \\ &\implies & X \in \mathcal{P}(B) \end{aligned}$$

  Como además $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, tenemos que $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Luego:

$$\mathcal{P}(\underbrace{A \cup B}_{B}) = \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

- $(\implies)$
  Demostremos la contrarrecíproca, esto es:

$$[A \nsubseteq B \wedge B \nsubseteq A] \implies \mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

  Como $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$, entonces $\exists a, b$ tal que $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$. Notemos que $\{a, b\} \subseteq A \cup B$, pero que $\{a, b\} \nsubseteq A$ y $\{a, b\} \nsubseteq B$. Luego $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, pero $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(A)$ y $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(B)$, de esto concluimos que $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

P5. [Una Ecuación con conjuntos]

a) Sean A, B dos conjuntos no-vacíos demuestre que:

$$A \cap B = \emptyset \iff (A \cup B) \setminus B = A$$

b) Sean A, B dos conjuntos no-vacíos, encuentre un conjunto X que verifique las siguientes ecuaciones:

$$A \cup X = A \cup B \qquad A \cap X = \emptyset$$

c) ¿Es la solución que encontró en la parte anterior única?

Solución 5.

a) Demostraremos cada implicancia por separado.

- ($\Longrightarrow$)
  Notemos que:
  $$(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap B^c = (A \cap B^c) \cup \underbrace{(B \cap B^c)}_{\emptyset} = A \cap B^c$$
  Nos gustaría que $A \cap B^c = A$, en efecto sabemos que $A \cap B^c \subseteq A$, mostremos que $A \subseteq A \cap B^c$. Sea $x \in A$, si $x \in B$ esto contradecería el hecho que $A \cap B = \emptyset$, luego $x \notin B$, por tanto $x \in A \cap B^c$. Es decir $A \cap B^c = A$ y con esto concluimos.
- ($\Longleftarrow$)
  Tenemos como Hipótesis que $(A \cup B) \setminus B = A$. Luego:
  $$\begin{aligned} & (A \cup B) \setminus B = A \\ \Longrightarrow \quad & (A \cup B) \cap B^c = A \\ \Longrightarrow \quad & (A \cap B^c) \cup \underbrace{(B \cap B^c)}_{\emptyset} = A \\ \Longrightarrow \quad & A \cap B^c = A \qquad / \cap B \\ \Longrightarrow \quad & A \cap \underbrace{B^c \cap B}_{\emptyset} = A \cap B \\ \Longrightarrow \quad & \emptyset = A \cap B \end{aligned}$$

b)

- **Borrador:** Veamos que tendría que satisfacer una solución de lo anterior. Como $A \cap X = \emptyset$ sabemos que:
  $$\begin{aligned} X &= (X \cup A) \setminus A \\ &= (A \cup B) \setminus A \\ &= (A \cup B) \cap A^c \\ &= \underbrace{(A \cap A^c)}_{\emptyset} \cup (B \cup A^c) \\ &= B \setminus A \end{aligned}$$
  Nuestro candidato entonces sería $X = B \setminus A$.
- **Demostración:** Tomemos $X = A \setminus B$. Verifiquemos que es solución, veamos que $X \cap A = \emptyset$:
  $$X \cap A = (B \setminus A) \cap A = B \cap A^c \cap A = \emptyset$$
  Y que $A \cup B = A \cup X$:
  $$A \cup X = A \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cap A^c)}_{\emptyset} = (A \cup B)$$

c) En efecto es único. Supongamos que existen X_1 y X_2 soluciones de las eciacones anteriores con $X_1 \neq X_2$ luego:

$$X_1 = (A \cup X_1) \setminus A \implies X_1 = (A \cup B) \setminus A$$

De manera similar:

$$X_2 = (A \cup X_2) \setminus A \implies X_2 = (A \cup B) \setminus A$$

De esta manera $X_1 = X_2$ lo que esuna contradicción, por tanto el X de la parte b) es único.