MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 4 : Teoría de Conjuntos

13 de abril del 2017

Recordemos:

- La proposición $x \in A$ se lee x pertenece al conjunto A.
- A partir de un conjunto universo $\mathcal{U}$ y una proposición lógica $p(x)$, podemos definir el conjunto A de quienes satisfacen la proposición lógica como:

$$(\forall x)[(x \in A) \iff (x \in \mathcal{U} \land p(x))]$$

  O de manera abreviada:

$$A = \{x \in \mathcal{U} : p(x)\}$$

- Se define el conjunto vacío como:

$$\emptyset = \{x \in \mathcal{U} : x \neq x\} = \{\}$$

- Diremos que A es subconjunto de B si:

$$(A \subseteq B) \iff [(x \in A) \implies (x \in B)]$$

  De similar manera:

$$(A = B) \iff [(A \subseteq B) \land (B \subseteq A)]$$

- Sean A y B dos subconjuntos de $\mathcal{U}$. Definimos las siguientes operaciones entre conjuntos :
  1. $A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}$
  2. $A \cap B = \{x : x \in A \land x \in B\}$
  3. $A^c = \{x : x \notin A\}$
  4. $A \setminus B = A \cap B^c$
  5. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- La unión e intersección satisfacen las leyes de conmutatividad, asociatividad, distributividad y de Morgan.
- Definimos el conjunto de las partes de un conjunto A como la familia de todos los subconjuntos de A.

$$\mathcal{P}(A) = 2^A = \{X : X \subseteq A\}$$

- Sea $a \in A$ y $b \in B$, definimos el par ordenado (a, b) como:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

- La igualdad de pares ordenados es por coordenadas, es decir:

$$(a, b) = (c, d) \iff (a = c \land b = d)$$

- Definimos el producto entre A y B como:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \land b \in B\}$$

P1. [Varios]
Sean A, B, X subconjuntos de un universo $\mathcal{U}$. Demuestre que:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

b) $(A \cap B) \cup X = A \cap (B \cup X) \iff X \subseteq A$

c) $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X)$

P2. [Álgebra de Conjuntos]
Sean A, B, C y D conjuntos. Demuestre las siguientes igualdades:

a) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

b) $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A] = A \cup B$

P3. [Diferencia Simétrica]
Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

a) Demuestre la *propiedad cancelativa* de la diferencia simetrica, es decir:

$$A \triangle B = A \triangle C \implies B = C$$

b) Use lo anterior para demostrar que:

$$B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \iff A = \emptyset$$

c) Use la propiedad cancelativa para demostrar que $\forall X, Y \subseteq \mathcal{U}$ se tiene la siguiente propiedad:

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \implies X = Y$$

donde $A \subseteq \mathcal{U}$ es un conjunto fijo.

P4. [Conjunto Potencia]
Sean A y B subconjuntos de un universo $\mathcal{U}$. Demuestre que:

a) $A \cap B = \emptyset \iff \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

b) $[\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)] \iff [A \subseteq B \vee B \subseteq A]$.

P5. [Una Ecuación con conjuntos]

a) Sean A, B dos conjuntos no-vacíos demuestre que:

$$A \cap B = \emptyset \iff (A \cup B) \setminus B = A$$

b) Sean A, B dos conjuntos no-vacíos, encuentre un conjunto X que verifique las siguientes ecuaciones:

$$A \cup X = A \cup B \qquad A \cap X = \emptyset$$

c) ¿Es la solución que encontró en la parte anterior única?