MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 2 : Cuantificadores y Principio de Inducción

30 de marzo del 2017

P1. [Demostraciones Cuantificadas]

a) Demuestre que:

$$[\exists m \in \mathbb{Z}]\left[\frac{m-7}{2m+4} = 5\right]$$

b) Demuestre que:

$$[\forall n \in \mathbb{N}][n \text{ es par} \iff n^2 \text{ es par}]$$

Solución 1.

a)
- **Borrador:** Para demostrar que algo existe hay que encontrarlo, una buena idea para esto es asumir que existe y ver que propiedades debe satisfacer el objeto que queremos encontrar. En nuestro caso nos quedaría:

$$\begin{aligned}\frac{m-7}{2m+4} &= 5\\ m-7 &= 5(2m+4)\\ m-7 &= 10m+20\\ 9m &= -27\\ m &= -3\end{aligned}$$

  De donde nuestro candidato a m será -3.
- **Demostración:** Tomando $m = -3$ vemos que:

$$\frac{m-7}{2m+4} = \frac{-10}{-6+4} = \frac{-10}{-2} = 5$$

  De donde concluimos que $[\exists m \in \mathbb{Z}]\left[\frac{m-7}{2m+4} = 5\right]$.

b) Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Cómo queremos demostrar una equivalencia algo más complicada demostraremos cada implicancia por separado.

- ($\Longrightarrow$)
  Tenemos como hipótesis para esta parte que n es par, es decir, que $n = 2k$ para algún k. Luego:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$$

  De donde concluímos que n^2 es par.
- ($\Longleftarrow$)
  Esta implicancia es algo más complicada, trabajemosla por contradicción. Luego tenemos como hipotésis que n^2 es par y que n es impar. Como n es impar, sabemos que se escribe como $n = 2k+1$ para algún k. Luego:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$$

  De esto concluímos que n^2 es impar, lo que es una contradicción pues n^2 no puede ser par e impar a la vez.

P2. [P1 b) Control 1, Año 2012 + P1 b) Control 1, Año 2015]

a) Demuestre que $[\exists y][p(y) \implies (\forall x)p(x)]$ es una tautología

b) Muestre que las proposiciones:

$$\text{(i) } [\forall x][\exists y][p(x) \implies p(y)] \qquad \text{(ii) } [\exists y][\forall x][p(x) \implies p(y)]$$

Son ambas verdaderas para cada función proposicional $p(\cdot)$.

Solución 2.

a)
- **Borrador:** Tenemos que escojer un y de manera que:

$$p(y) \implies (\forall x)p(x)$$

sea verdadero. A uno le gustaría escoger un y de manera que $p(y) \equiv F$, pues en dicho caso da lo mismo lo que vale lo de la derecha. ¿Que pasa si es que no podemos escojer un y tal que $p(y) \equiv F$? Entonces todos los $p(x)$ deben ser verdaderos, en dicho caso:

$$[p(y) \implies \underbrace{(\forall x)p(x)}_{V}] \equiv V$$

Esto hace nacer una demostración por casos de manera "natural".

- **Demostración:** Lo haremos por casos:
  - **Caso 1:** $(\exists z, \overline{p(z)})$
    Tomando $y = z$ tenemos que:

$$[p(y) \implies (\forall x)p(x)] \equiv [\underbrace{p(z)}_{F} \implies (\forall x)p(x)] \equiv V$$

    De donde $[\exists y][p(y) \implies (\forall x)p(x)]$.
  - **Caso 2:** $(\forall z, p(z))$
    Tomando y cualquier elemento tenemos que:

$$[p(y) \implies (\forall x)p(x)] \equiv [\underbrace{p(y)}_{V} \implies (\forall x)\underbrace{p(x)}_{V}] \equiv V$$

    De donde $[\exists y][p(y) \implies (\forall x)p(x)]$.

  Como en todos los casos funciona se concluye.

b) (i)
- **Borrador:** Una vez fijado un x tenemos que encontrar un y de manera que:

$$p(x) \implies p(y)$$

Si $p(x)$ fuese falso no habría de que preocuparse, en cambio si fuese verdadero $p(x)$ necesitamos un $p(y)$ que también fuese verdadero, notemos que si $y = x$ entonces $p(y)$ y $p(x)$ tendrían el mismo valor de verdad. Nuestro candidato será entonces $y = x$.

- **Demostración:** Sea x arbitrario. Tomando $y = x$, tenemos que:

$$[p(x) \implies p(y)] \equiv [p(x) \implies p(x)] \equiv V$$

De donde $[\forall x][\exists y][p(x) \implies p(y)]$.

(ii)

- **Borrador:** Ahora la elección del y no puede depender del x (pues debe funcionar para todo x). Es decir buscamos un y de manera que siempre:

$$p(x) \implies p(y)$$

  sea verdadero (independiente del x). A uno le gustaría elegir un y de manera que $p(y) \equiv V$, pues así independiente de lo que pase con $p(x)$ la proposición es verdadera. ¿Que pasa si no podemos encontrar un y de manera que $p(y) \equiv V$? En dicho caso todos los x deben verificar $p(x) \equiv F$, es decir para cualquier y:

$$[p(x) \implies p(y)] \equiv V$$

  De nuevo, esto hace nacer de manera "natural" una demostración por casos.

- **Demostración:** Lo haremos por casos:
  - **Caso 1:** $(\exists z, p(z))$
    Tomando $y = z$, para cualquier x arbitrario tenemos que:

$$[p(x) \implies p(y)] \equiv [p(x) \implies \underbrace{p(z)}_{V}] \equiv V$$

    De donde $[\exists y][\forall x][p(x) \implies p(y)]$.
  - **Caso 2:** $(\forall z, \overline{p(z)})$
    Tomando y cualquier elemento, para cualquier x arbitrario tenemos que:

$$[p(x) \implies p(y)] \equiv [F \implies F] \equiv V$$

    De donde $[\exists y][\forall x][p(x) \implies p(y)]$.

  Como en todos los casos funciona se concluye.

P3. [Todos los caballos tienen el mismo color]
Su amigo Juan Pablo le cuenta que ha notado una cosa curiosa últimamente ¡Todo el mundo se llama Juan Pablo! Usted siendo una persona escéptica y conocedor de que Juan Pablo suele mentir, le pide una demostración de tal afirmación. Orgulloso Juan Pablo le presenta el siguiente argumento:

Demostraremos que toda la gente tiene el mismo nombre, por inducción sobre el número de personas n.

Caso Base $(n = 1)$
Claramente en todo grupo de 1 persona poseen todos el mismo nombre.

Hipótesis Inductiva
Todo grupo de n personas posee el mismo nombre.

Paso Inductivo $(n + 1)$
Consideremos un grupo de $n + 1$ personas. Si tomamos las n primeras personas por Hipótesis inductiva todas deben tener el mismo nombre, de similar manera las n últimas personas deben tener el mismo nombre. Tomando una persona que no sea la primera ni la última vemos que tanto los n primeros como los n últimos deben tener el mismo nombre, por tanto las $n + 1$ personas poseen el mismo nombre.

Para concluir, dice Juan Pablo, como todas las personas tienen el mismo nombre y yo me llamo Juan Pablo, claramente todos nos llamamos Juan Pablo.

¿Donde está el error en el argumento de Juan Pablo?

Solución 3. El error en el argumento de Juan Pablo está en la siguiente linea:

"Tomando una persona que no sea la primera ni la última... "

El problema es que al pasar del caso $n = 1$ al $n = 2$ no existe una persona que no sea ni la primera ni la última, luego la demostración **NO** es válida pues para serlo debe serlo en cualquier paso de la inducción (acá sería válido sólo para los $n \geq 3$).

P4. [Varios de Inducción]
Demuestre usando el principio de inducción:

a) n puntos sobre una recta generan $n+1$ segmentos $\forall n \geq 0$.

b) $\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \geq 0$.

c) $6n < 2^n$ para todo $n \geq n_0$ (debe encontrar tal n_0).

d) Considere la siguiente sucesión definida mediante la recurrencia $s_0 = 0, s_n = 2s_{n-1} + 1$. Encuentre una forma cerrada para s_n y demuestre que es correcta.

Solución 4.

a)
- **Caso Base:** $(n = 0)$
  0 puntos generan 1 segmento (la recta completa).
- **Hipótesis Inductiva:**
  n puntos sobre una recta generan $n+1$ segmentos.
- **Paso Inductivo:**
  Para el caso $n+1$ "ignoraremos" el último punto luego sabemos que ignorando dicho punto tenemos $n+1$ segmentos, agregar esté último punto agrega un segmente, de donde tenemos un total de $n+2$.

b)
- **Caso Base:** $(n = 0)$
  $2^0 = 2^1 - 1$
- **Hipótesis Inductiva:**
  $2^0 + 2^1 + \ldots 2^n = 2^{n+1} - 1$
- **Paso Inductivo:**
  Probémoslo para el caso $n+1$:

$$\begin{aligned}\underbrace{2^0 + 2^1 + \ldots 2^n}_{=2^{n+1-1}} + 2^{n+1} &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1\end{aligned}$$

  Con esto concluimos.

c) Calculando los primeros términos:

$$6 \cdot 0 < 2^0 \qquad 6 \cdot 1 \geq 2^1 \qquad 6 \cdot 2 \geq 2^2 \qquad 6 \cdot 3 \geq 2^3 \qquad 6 \cdot 4 \geq 2^4 \qquad 6 \cdot 5 < 2^5 \qquad 6 \cdot 6 < 2^6 \qquad 6 \cdot 7 < 2^7$$

De esto conjeturamos que tal n_0 es 5. Demostrémoslo:

- **Caso Base:** $(n = 5)$
  $6 \cdot 5 < 2^5$.
- **Hipótesis Inductiva:**
  $6n < 2^n$.
- **Paso Inductivo:**

$$\begin{aligned}6(n+1) &= 6n + 6 && \text{/Por H.I.} \\ &< 2^n + 6 && /6 < 2^n \text{ pues } n \geq 5 \\ &< 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1}\end{aligned}$$

d) Computando los primeros términos tenemos:

$$s_0 = 0 \qquad s_1 = 1 \qquad s_2 = 3 \qquad s_3 = 7 \qquad s_4 = 15 \qquad s_5 = 31 \qquad \ldots$$

De esto conjeturamos que $s_n = 2^n - 1$. En efecto:

- **Caso Base:** $(n = 0)$
  $s_0 = 0 = 2^0 - 1$.
- **Hipótesis Inductiva:**
  $s_n = 2^n - 1$.
- **Paso Inductivo:**
  Probémoslo para el caso $n + 1$:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 2s_n + 1 \\ &= 2(2^n - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Con esto concluimos.

P5. [Divisibilidad]

a) Demuestre que $n^2 + n$ es par para todo $n \geq 0$.

b) Demuestre que $3^n + 4^n - 1$ es divisible por 3 para todo $n \geq 1$.

c) Demuestre que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 5^{2n} + (-1)^{n+1} \text{ es divisible por } 13$$

Solución 5.

a)
- **Caso Base:** $(n = 0)$
  $0^2 + 0 = 0$ es par.
- **Hipótesis Inductiva:**
  $n^2 + n$ es par.
- **Paso Inductivo:**
  Probémoslo para el caso $n + 1$:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + (n+1) &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\ &= \underbrace{n^2 + n}_{\text{par por H.I.}} + 2n + 2 \\ &= 2k + 2n + 2 \\ &= 2(k + n + 1)\end{aligned}$$

  Luego $(n+1)^2 + (n+1)$ es par, con esto concluimos.

b)
- **Caso Base:** $(n = 1)$
  $3^1 + 4^1 - 1 = 6$ es divisible por 3.
- **Hipótesis Inductiva:**
  $3^n + 4^n - 1 = 3k$ para algún k.
- **Paso Inductivo:**
  Probémoslo para el caso $n + 1$:

$$\begin{aligned}3^{n+1} + 4^{n+1} - 1 &= 3^{n+1} + 4 \cdot 4^n - 1 \\ &= 3^{n+1} + 4 \cdot 4^n - 1 + \underbrace{4 \cdot 3^n - 4 \cdot 3^n + 4 - 4}_{0} \\ &= 3^{n+1} + 4(\underbrace{4^n + 3^n - 1}_{3k}) + 4 - 1 \\ &= 3^{n+1} + 4(3k) + 3 \\ &= 3(3^n + 4k + 1)\end{aligned}$$

  Luego $3^{n+1} + 4^{n+1} - 1$ es divisible por 3, con esto concluimos.

c)
- **Caso Base:** $(n = 0)$
  $5^{2 \cdot 0} + (-1)^{0+1}$ es divisible por 13.
- **Hipótesis Inductiva:**
  $5^{2n} + (-1)^{n+1} = 13k$ para algún k.
- **Paso Inductivo:**
  Demostrémoslo para el caso $n + 1$

$$\begin{aligned}5^{2(n+1)} + (-1)^{n+1+1} &= 5^{2n+2} + (-1)^{n+2} \\ &= 25 \cdot 5^{2n} + (-1)^{n+2} + \underbrace{25 \cdot (-1)^{n+1} - 25 \cdot (-1)^{n+1}}_{0} \\ &= 25\,\underbrace{(5^{2n} + (-1)^{n+1})}_{13k} + (-1)(-1)^{n+1} - 25 \cdot (-1)^{n+1} \\ &= 25 \cdot 13k + (-1 - 25)(-1)^{n+1} \\ &= 25 \cdot 13k + (-26)(-1)^{n+1} \\ &= 13(25k - 2(-1)^{n+1})\end{aligned}$$

P6. [Nuggets]
La cadena de comida rápida McKing vende nuggets de pollo en dos modalidades:

- Una bolsa de 3 nuggets.
- Una cajita de 5 nuggets.

Demuestre que si usted quiere comprar $n \geq 8$ nuggets en McKing puede hacerlo de manera exacta (es decir hay una combinación de bolsas y cajitas tal que no le sobran ni faltan nuggets).

Figura 1: Estos 9 nuggets puede ser conseguidos comprando 3 bolsas.

Solución 6. Resolveremos esto de dos maneras. Primera forma:

- **Caso Base:** $(n = 8)$
  Si quiero comprar 8 nuggets de manera exacta, puedo comprar una bolsa y una cajita.
- **Hipótesis Inductiva:**
  $\forall n \geq 8$ se pueden comprar n nuggets de manera exacta.
- **Paso Inductivo**
  Probémoslo para el caso $n + 1$. Como queremos ocupar nuestra hipótesis de inducción veamos que pasa al comprar n nuggets, para esto pongámonos en casos.
  - **Caso 1:** (Al comprar los n nuggets compre al menos una cajita)
    Notemos que si pudimos comprar n nuggets de manera exacta por al menos una cajita, podemos reemplazar una cajita por dos bolsas y lograríamos comprar $n + 1$ nuggets de manera exacta.
  - **Caso 2:** (Al comprar los n nuggets compre puras bolsas)
    Si hubiéramos logrado comprar n nuggets con puras bolsas, como $n \geq 8$ sabemos que compramos por lo menos 3 bolsas. Luego basta con reemplazar estas 3 bolsas con 2 cajitas y podríamos comprar $n + 1$ nuggets.

Segunda forma:

- **Caso Base:** $(n = 8, 9, 10)$
  Si quiero comprar 8 nuggets de manera exacta, puedo comprar una bolsa y una cajita.
  Si quiero comprar 9 nuggets de manera exacta, puedo comprar tres bolsas.
  Si quiero comprar 10 nuggets de manera exacta, puedo comprar dos cajitas.
- **Hipótesis Inductiva:**
  $\forall n \geq 8$ se pueden comprar n nuggets de manera exacta.
- **Paso Inductivo**
  Probémoslo para el caso $n + 1$. Por Hipótesis inductiva sabemos que podemos comprar $n - 2$ nuggets de manera exacta, agregando una cajita podemos comprar $n + 1$ nuggets de manera exacta.

Obs: Notemos que en la segunda forma necesitamos más casos bases, pues necesitamos retroceder 3 pasos (desde $n + 1$ a $n - 2$), luego nos gustaría empezar a probar desde el caso $n = 11$. En la primera forma era necesario sólo un caso base pues sólo miramos el caso anterior.

P7. [Fila]
Sea F el conjunto de personas que se encuentra esperando en la fila del casino de la escuela para ser atendidas. Para $x, y \in F$ se define la función proposicional:

$$\phi(x,y) \iff \text{“El alumno } x \text{ está más adelante que el alumno } y \text{ en la fila”}$$

a) Sean $p, q, r \in F$, determine la posición de p, q y r en la fila si satisfacen lo siguiente:
1) $(\forall x \in F)[\phi(p,x) \vee x = p]$
2) $(\forall x \in F)[\phi(x,q) \vee x = q]$
3) $(\exists! x \in F)[\phi(r,x) \veebar \phi(x,r)]$

b) Niegue las proposiciones anteriores.
Hint: Es útil encontrar formas más sencillas para las proposiciones $\overline{\phi(x,y)}$ *y* $\phi(x,y) \iff \phi(y,x)$.

Solución 7.

a) 1) Notemos que $(\forall x \in F)[\phi(p,x) \vee x = p]$ significa que todas las personas de la fila se encuentran o atrás de p o son p, es decir p es el primero.
2) q es el último, el razonamiento es análogo al caso anterior.
3) Veamos que $(\exists! x \in F)[\phi(r,x) \veebar \phi(x,r)]$ dice que existe una única persona que se encuentra adelante o atrás, pero no adelante y atrás, es decir r se encuentra en una fila de dos personas.

b) Notemos que $\overline{\phi(x,y)}$ significa que “El alumno x no está más adelante que el alumno y en la fila”, por tanto sabemos que el alumno y está más adelante que el alumno x o que el alumno x y el y son el mismo, por tanto:

$$\overline{\phi(x,y)} \equiv [\phi(y,x) \vee x = y]$$

Por otro lado sabemos que $\phi(x,y) \iff \phi(x,y)$ es falso si $x \neq y$ (puesto que en este caso $\phi(x,y)$ y $\phi(y,x)$ tienen valores de verdad distintos), y es verdadero si $x = y$ (pues en este caso tanto $\phi(x,y)$ como $\phi(y,x)$ son falsas). Concluimos que $\phi(x,y) \iff \phi(y,x)$ siempre tiene el mismo valor de verdad que $x = y$, luego:

$$[\phi(x,y) \iff \phi(x,y)] \equiv [x = y]$$

1) Neguemos la proposición, es decir buscamos:

$$\begin{aligned}
\overline{(\forall x \in F)[\phi(p,x) \vee x = p]} &\equiv (\exists x \in F)\overline{[\phi(p,x) \vee x = p]} \\
&\equiv (\exists x \in F)[\overline{\phi(p,x)} \wedge x \neq p] \\
&\equiv (\exists x \in F)[(\phi(x,p) \vee x = p) \wedge x \neq p] \\
&\equiv (\exists x \in F)[(\phi(x,p) \wedge x \neq p) \vee \underbrace{(x = p \wedge x \neq p)}_{F}] \\
&\equiv (\exists x \in F)[\phi(x,p) \wedge x \neq p]
\end{aligned}$$

Que significa existe alguien en la fila que va adelante de p y no es p, o de otra forma p no es primero.

2) Este caso es análogo al anterior, solo que esta vez se obtiene:

$$(\exists x \in F)[\phi(q,x) \wedge x \neq q]$$

3) Notemos primero que la negación de existe un único es que o no exista ninguno o que existan dos, es decir:

$$\overline{(\exists! x)[\varphi(x)]} \equiv (\forall x)[\overline{\varphi(x)}] \vee (\exists x,y)[x \neq y \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y)]$$

Luego nos queda:

$$\begin{aligned}
&\overline{(\exists! x \in F)[\phi(x,r) \veebar \phi(r,x)]} \\
\equiv\ & (\forall x \in F)[\overline{\phi(x,r) \veebar \phi(r,x)}] \vee (\exists x,y \in F)[x \neq y \wedge (\phi(x,r) \veebar \phi(r,x)) \wedge (\phi(y,r) \veebar \phi(r,y))] \\
\equiv\ & (\forall x \in F)[\underbrace{\phi(x,r) \iff \phi(r,x)}_{r=x}] \vee (\exists x,y \in F)[x \neq y \wedge (\phi(x,r) \veebar \phi(r,x)) \wedge (\phi(y,r) \veebar \phi(r,y))] \\
\equiv\ & (\forall x \in F)[r = x] \vee (\exists x,y \in F)[x \neq y \wedge \underbrace{(\phi(x,r) \veebar \phi(r,x))}_{x \neq r} \wedge \underbrace{(\phi(y,r) \veebar \phi(r,y))}_{y \neq r}] \\
\equiv\ & (\forall x \in F)[r = x] \vee (\exists x,y \in F)[x \neq y \wedge x \neq r \wedge y \neq r]
\end{aligned}$$

Donde la primera parte dice que todos los elementos de la fila son r y la segunda de que existen dos elementos distintos de r y distintos entre sí en la fila, es decir la fila es de 1 o más de 3 personas.