**MA1101-5** Introducción al Álgebra
**Profesor:** Mauricio Telias
**Auxiliar:** Arturo Merino

# Auxiliar 1 : Lógica Proposicional

23 de marzo del 2017

**Recordemos:**

- Una proposición lógica es un enunciado que toma un valor de verdad $V$ o $F$.
- Los conectivos lógicos son operaciones entre proposiciones y permiten construir nuevas proposiciones a partir de proposiciones ya conocidas.
- Las tablas de verdad de las proposiciones básicas son:

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ |

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

- Los conectivos $\vee$ y $\wedge$ son asociativos, conmutativos y distribuyen uno con respecto a otro.
- Otras proposiciones conocidas son:
  1. $(p \implies q) \equiv (\overline{p} \vee q)$
  2. $(p \iff q) \equiv [(p \implies q) \wedge (q \implies p)]$
  3. $(p \veebar q) \equiv \overline{(p \iff q)}$
- Se dirá que una proposición es una tautología si su valor de verdad es siempre $V$, en cambio si es siempre $F$ diremos que es una contradicción.
- Algunas tautologías útiles son:
  1. $\overline{(p \vee q)} \iff (\overline{p} \wedge \overline{q})$
  2. $\overline{(p \wedge q)} \iff (\overline{p} \vee \overline{q})$
  3. $(p \implies q) \iff (\overline{q} \implies \overline{p})$
  4. $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies (p \implies r)$

**P1. [Metódos de Demostración]**
Sean $p, q, r, s$ proposiciones lógicas.

*a*) Demuestre mediante el metódo algebraico que:
1) $p \vee q \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$.
2) $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \iff \overline{(p \vee (\overline{p} \wedge q))}$.
3) $[(p \implies \overline{q}) \wedge (r \implies q)] \implies (p \implies \overline{r})$.

*b*) Demuestre mediante el metódo exploratorio que:
1) $(p \implies r) \implies ((p \wedge q) \implies r)$.
2) $[(p \implies q) \wedge (r \implies s)] \implies [(p \wedge r) \implies (q \wedge s)]$.

*c*) Demuestre por contradicción:
1) $(p \wedge q) \implies (p \vee q)$.
2) $[(p \implies q) \wedge (r \implies s)] \implies [(p \wedge r) \implies (q \wedge s)]$.

**P2. [P1 *a*) Control 1, Año 2016 + P1 *a*) Control 1, Año 2012]**
Sean $p$, $q$ y $r$ tres proposiciones.

*a*) Demuestre, sin usar tablas de verdad, que

$$[(p \vee q) \iff r] \implies [(q \implies r) \wedge (p \implies r)]$$

*b*) Demuestre que

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \not\Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$$

**P3. [Encontrar valores de verdad y un nuevo conectivo]**

*a*) Determine el valor de verdad de las proposiciones $p, q, r, s, t$ si se sabe que la siguiente proposición es falsa:

$$[(p \iff q) \wedge \overline{(r \implies s)} \wedge \bar{t}\ ] \implies [s \vee (q \implies s)]$$

*b*) Se define un operador ternario $\Delta$ como sigue:

$$\Delta(a, b, c) \iff [a \implies (b \wedge c)]$$

Demuestre que:

1) $\Delta(a, b, c) \iff \Delta(a, c, b)$.
2) $\Delta(a, a, b) \iff (a \implies b)$.
3) $\Delta(a \wedge b \wedge c, b, c) \iff V$.

**P4. [NOR]**
A usted le cuentan de un nuevo conectivo lógico $\downarrow$ que se utiliza para significar "ni". Es decir $P \downarrow Q$ se lee como "ni $P$ ni $Q$".

*a*) Encuentre una tabla de verdad para el conectivo $\downarrow$.

*b*) Encuentre una proposición equivalente a $P \downarrow Q$, que use solo los conectivos $\{\vee, \wedge, \sim\}$.
*Obs : No es necesario que use todos los conectivos.*

*c*) Demuestre que las siguientes proposiciones son tautologías :

1) $\bar{a} \iff (a \downarrow a)$
2) $(a \wedge b) \iff [(a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)]$
3) $(a \vee b) \iff [(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)]$

**P5. [P1 i) Control 1, Año 2006]**
Sean $p, q, r, s, t, u$ proposiciones. Suponga que se sabe que una de las siguientes proposiciones es verdadera.

$$\begin{aligned} \text{I} &\Leftrightarrow p \wedge q \wedge \overline{r} \wedge s \wedge \bar{t} \wedge u \\ \text{II} &\Leftrightarrow \overline{p} \wedge q \wedge r \wedge \overline{s} \wedge \bar{t} \wedge u \end{aligned}$$

Cuál o cuáles de las siguientes proposiciones se puede asegurar que es verdadera?
Cuál o cuáles puede asegurar que es falsa?
En cuál o cuáles no puede garantizar su veracidad o falsedad?

*a*) $(q \wedge s) \Leftrightarrow (p \vee t)$.

*b*) $(q \wedge t) \vee (\overline{r} \wedge \overline{u})$.

*c*) $[\overline{(p \Rightarrow t)}] \Rightarrow (r \wedge t)$.