MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 15: Polinomios

29 de junio de 2017

P1. Sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2+f)+(e+f)x+(a-d)x^4+(2a+c)x^5+(a+b)x^7 \\ q(x) &= 3+(f+2)x+(a+b+c+d)x^3+(b+c+1)x^4+bx^5 \end{aligned}$$

Determine los valores de $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que $p = q$. Escriba el polinomio resultante.

P2. Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

P3. Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raiz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raices y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

P4. Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $\text{gr}(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x-1)$ y que los restos de sus divisones por $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x-4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

P5. Sea $p \in \mathbb{C}[x]$. Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) \geq 1$

P6. Sea $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, definamos:

$$p(x) = x^{3n_0} + x^{3n_1+1} + x^{3n_2+2}$$

Demuestre que $p(x)$ es divisible por $q(x) = x^2 + x + 1$.

Propuestos

P7. Considere el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$. Se sabe que $x_1 = 2 + 3i$ es raiz de P. Se pide encontrar todas las raices de P y luego factorizar en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

P8. Sea p un polinomio con coeficientes reales tal que $p \not\equiv 0$ tal que $i, 1, 2, 3$ son raíces de p. Discuta sobre el grado mínimo del polinomio. Luego, suponiendo que p es mónico y del grado mínimo encuéntrelo.

P9. [**Recuperativo I - 2004**] Determinar los valores $a, b, c \in \mathbb{C}$ tales que el polinomio $P(x) = x^5 + ax^2 + b$ sea divisible por el polinomio $Q(x) = x^3 + x^2 + cx + 1$

P10. [**Recuperativo I - 2005**] Pruebe que $w_k = e^{i\frac{2k}{n}\pi}, k = 1, 2, \ldots, n-1$ son raíces del polinomio $p(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}$. Le puede ser útil pensar en alguna sumatoria.

P11. [**Recuperativo I - 2000**] Sabiendo que el polinomio $P(z) = 2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz - 3i + 1 \in \mathbb{C}[x]$ tiene una raíz real a, determine alguna de las raíces de $P(z)$

P12. [**Recuperativo I - 2002**] Sea $p(x)$ un polinomio mónico de grado 2 con coeficientes reales. Demuestre que

$$p(x) \text{ tiene una raiz en } (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \text{de modulo } 1 \iff p(x) = x^2 + ax + 1,\ a \in]-2, 2[$$

P13. [**Recuperativo I - 2005**] Se sabe que el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8$ no admite raíces reales y que una de sus raíces tiene modulo 2. Determine todas las raíces de $P(x)$

P14. [**Examen - 2011**] Sea $p(x)$ un polinomio de grado mayor o igual a 1 y $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que r es raíz de $p(x)$ si y solo si $(r - a)$ es raiz de $q(x) = p(x + a)$

P15. [**Correspondencia en Polinomios**]
Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

a) Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) \geq 1$.
Hint : Puede ser útil el teorema fundamental del álgebra.

b) El objetivo de esta parte es probar que $p(x)$ es inyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) = 1$.

(i) Demuestre que si $\text{gr}(p) = 1$, entonces $p(x)$ es inyectivo.

(ii) Demuestre que si $\text{gr}(p) < 1$, entonces $p(x)$ no es inyectivo.

(iii) Sea $n > 1$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$. Definamos $q \in \mathbb{C}[x]$ como:

$$q(x) = \lambda(x - a)^n$$

Demuestre que $q(x)$ no es inyectivo.

(iv) Concluya la dirección que falta.

- Consideraremos a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ como el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un polinomio es una función $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ de la forma:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes en $\mathbb{K}$ a las que llamaremos coeficientes.

- Al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ se le denota $\mathbb{K}[x]$.

- Sean $p, q \in \mathbb{K}[x]$.

  $p = q \iff$ Los coeficientes de p y q son iguales.

- Sea $p \in \mathbb{K}[x]$. Definimos $\text{gr}(p)$ (el grado) como el k más grande tal que $a_k \neq 0$. Si $p \equiv 0$, diremos que $\text{gr}(p) = -\infty$.

- Diremos que $p \in \mathbb{K}[x]$ es mónico si el coeficiente asociado a $x^{\text{gr}(p)}$ es 1.

- Sea $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$ definimos:

  1. $(p + q)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$
  2. $(pq)(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} \left(\sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k$

  Estas operaciones verifican:

  1. $\text{gr}(p + q) \leq \text{máx}\{\text{gr}(p), \text{gr}(q)\}$.
  2. $\text{gr}(pq) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$.

- $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad, que no posee divisores del 0.

- En $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$, los únicos elementos con inverso para $\cdot$ son los polinomios de grado 0.

- Sean $p, d \in \mathbb{K}[x]$ con $d \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tal que:

  1. $p = qd + r$.
  2. $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$.

  A r lo llamaremos resto. Si $r \equiv 0$, diremos que d divide a p y lo denotaremos por $d|p$.

- **Teorema del Resto:** Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}$. El resto de dividir p por el polinomio $(x - c)$ es $p(c)$.

- Diremos que $c \in \mathbb{K}$ es una raíz de $p \in \mathbb{K}[x]$ si $p(c) = 0$.

- Si $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son raíces distintas de p, entonces:

$$(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_k) | p(x)$$

- Sea $n \geq 1$. Si $p \in \mathbb{K}[x]$ es tal que $\text{gr}(p) = n$, entonces p posee a lo más n raíces distintas.

- Sea $n \geq 1$ y $p, q \in \mathbb{K}[x]$ tales que $\text{gr}(p) \leq n$ y $\text{gr}(q) \leq n$. Si p y q coinciden en $n + 1$ puntos distintos, entonces son iguales.

- **Teorema Fundamental del Álgebra:**
  Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces p posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces existen $\alpha, c_1, \ldots c_m \in \mathbb{C}$ y $l_1, \cdots l_m \in \mathbb{N}$ tales que:

$$p(x) = \alpha(x - c_1)^{l_1} \ldots (x - c_m)^{l_m}$$

- Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ y sea $z \in \mathbb{C}$ una raiz de p. Entonces $\overline{z}$ es una raiz de p.

- Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, tal que $\text{gr}(p) = n \geq 1$. Entonces existen valores $\alpha, c_1, \ldots, c_m, a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s \in \mathbb{R}$ tales que:
  $p \equiv \alpha(x - c_1) \ldots (x - c_m)(x^2 + a_1 x + b_1) \ldots (x^2 + a_s x + b_s)$

- **Teorema de la Raíz Racional:** Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Si r y s son primos relativos tal que $\frac{r}{s}$ es una raíz de p, entonces:

$$r | a_0 \ \ \wedge \ \ s | a_n$$

- Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Entonces toda raíz racional de p es entera y divide a a_0.

- El algoritmo de Ruffini permite dividir un polinomio p por $x - c$.