MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 16: Examen

08 de julio de 2017

1. Complejos - Polinomios - Morfismo

P1. [**Raices de un complejo y factorización**] Sea $p(x) = x^4 + 2$. Determine sus raices y su factorización en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

P2. [**Teo Raiz Racional**] Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10$

P3. [**TFA**] Sea $p \in \mathbb{C}[x]$. Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) \geq 1$

P4. [**Recuperativo I - 2005**] Pruebe que $w_k = e^{i\frac{2k}{n}\pi}, k = 1, 2, \ldots, n-1$ son raíces del polinomio $p(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}$. Le puede ser útil pensar en alguna sumatoria.

P5. [**Recuperativo I - 2002**] Concluya que si $\theta \in \mathbb{R}$ y si $sin(\theta) \neq 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n} cos(2k\theta) = \frac{cos(n\theta)sin((n+1)\theta)}{sin(\theta)}$$

P6. Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(p(x)) = p(a)$$

(i) Demuestre que φ es un morfismo epiyectivo entre los anillos $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(ii) Pruebe que $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{(x-a)q(x) : q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$.

2. Induccion y sumatorias

P7. [**Recuperativo I - 1999**] Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \ldots, n\}$ se definen enteros $a(n,k) \in \mathbb{N}$ por la recuerrencia:

- $a(0,0) = 1$
- $a(n,0) = 2a(n-1,0)$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $a(n,n) = a(n-1,n-1)$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $a(n,k) = a(n-1,k-1) + 2a(n-1,k)$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $k \in \{0, \ldots, n\}$

Demuestre que $a(n,k) = \binom{n}{k} 2^{n-k}$

P8. **[Examen 2011]** Sea $n \in \mathbb{N}$ positivo. Calcule

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3+(-1)^k)^k}$$

P9. **[Examen 2010]** Pruebe que $p(x) = \sum_{j=1}^{6} \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} (\sum_{k=1}^{j} 4k^3 x^{j-1}) = 36x^5 - 25x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1$. Decida si tiene o no raices enteras.

P10. Calcule la suma $\sum_{k=0}^{n} k 7^k \binom{n}{k}$

3. Relaciones

P11. **[Relaciones y cjtos imagenes/pre imagenes]** Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función.

a) Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida sobre Y. Se define en X la relación preimagen de $\mathcal{R}$ que notamos $f^{-1}(\mathcal{R})$ por:

$$x_1 \ f^{-1}(\mathcal{R}) \ x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \ \mathcal{R} \ f(x_2)$$

1) Probar que $f^{-1}(\mathcal{R})$ es una relación de equivalencia en X
2) Probar que $[x]_{f^{-1}(\mathcal{R})} = f^{-1}([f(x)]_{\mathcal{R}})$ para cada $x \in X$
Indicación: Notar que hay que probar una igualdad de conjuntos y que $[f(x)]_{\mathcal{R}}$ es un subconjunto de Y.

b) Suponga ahora que $\mathcal{R}'$ es una relación de equivalencia en X y que f es epiyectiva. Definimos en Y la relación imagen por:

$$y_1 \ f(\mathcal{R}') \ y_2 \Longleftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X, \ f(x_1) = y_1 \quad \wedge \quad f(x_2) = y_2 \quad \wedge \quad x_1 \ \mathcal{R}' \ x_2$$

1) Probar que si f es inyectiva entonces $f(\mathcal{R}')$ es de equivalencia y además pruebe que $\mathcal{R}' = f^{-1}(f(\mathcal{R}'))$, es decir, $\mathcal{R}'$ es igual a la relación preimagen de $f(\mathcal{R}')$
2) ¿Que ocurre si f no fuera inyectiva?
Propuesto: Defina f tal que no sea inyectiva y $f(\mathcal{R}')$ no esa de equivalencia

4. Cardinalidad

P12. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función inyectiva, j y k dos naturales positivos fijos. Demuestre que $|\{f(n) : n \in \mathbb{N}, j < n \leq j^k\}| = j^k - j$

P13. Sea A un conjunto y $f : A \to \mathbb{N}$ una función. Demuestre que si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(\{n\})$ es numerable, entonces A es numerable.