

# Resolución Aux Extra C4

P11 a) Calcular  $\sum_{i=5}^m \sum_{j=1}^i \frac{i+1}{j(j+1)}$

Notemos que en la sumatoria más interna el índice es "j". Así que todo lo que no tenga j puede salir afuera de la sumatoria

$$\Rightarrow \sum_{i=5}^m \sum_{j=1}^i \frac{i+1}{j(j+1)} = \sum_{i=5}^m (i+1) \underbrace{\sum_{j=1}^i \frac{1}{j(j+1)}}_{\text{"A"}}$$

Resolvamos "A"

$$\sum_{j=1}^i \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^i \frac{(1+j)-j}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^i \frac{(1+j)}{j(j+1)} - \frac{j}{j(j+1)}$$

NIKITA  
NIPONE

$$= \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} - \frac{1}{(j+1)} \quad \text{TELES  
COPICA}$$

$$= 1 - \frac{1}{i+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=5}^m \sum_{j=1}^i \frac{i+1}{j(j+1)} &= \sum_{i=5}^m (i+1) \sum_{j=1}^i \frac{1}{j(j+1)} \\ &= \sum_{i=5}^m (i+1) \cdot \left(1 - \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=5}^m i+1 - \frac{i+1}{i+1} \\ &= \sum_{i=5}^m i+1 - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=5}^m i = \sum_{i=1}^{m-4} i+4 \quad \text{Cambio de índice}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-4} i + \sum_{i=1}^{m-4} 4$$

$$= \frac{(m-4)((m-4)+1)}{2} + 4((m-4)-1+1)$$

$$= \frac{(m-4)(m-3)}{2} + 4(m-4)$$

$$= (m-4) \left[ \frac{(m-3)}{2} + 4 \right] = (m-4) \left[ \frac{m-5}{2} \right]$$

$$= \frac{(m-4)(m-5)}{2}$$

∴ El resultado de la suma doble que nos piden es  $\frac{(m-4)(m-5)}{2}$



b)  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega = \{(n-p) \in \mathbb{N} : 0 \leq p < n, p \in \mathbb{N}\}$  Calcule

$$\sum_{j \in \Omega} \sum_{k=1}^j k + \frac{2^j}{j} = \sum_{j \in \Omega} a_j \quad \leftarrow \text{implícitamente está el "k"}$$

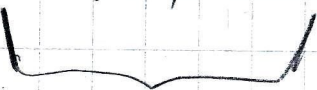
No podemos empezar sin estudiar  $\Omega$ , así que estudiémoslo

$$\Omega = \{(n-p) \in \mathbb{N} : \underbrace{0 \leq p < n}_{\text{estricto}}, p \in \mathbb{N}\}$$

$p$  toma el valor  $0, 1, 2, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad n-p &= n-0 = n & \text{si } p=0 \\ n-p &= n-1 & \text{si } p=1 \\ n-p &= n-2 & \text{si } p=2 \\ &\vdots & \end{aligned}$$

$$n-p = n-(n-1) = 1 \quad \text{si } p = n-1$$



estos son los elementos de  $\Omega$

$$\Rightarrow \Omega = \{n, n-1, n-2, \dots, 1\}$$

Ordenemos ascendentemente esto

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, n-2, n-1, n\}$$

$$\Rightarrow j \in \Omega \Leftrightarrow j \in \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$$

① Formalidad! (si no lo entiende ver final)

Luego recordemos que si queremos pasar una suma sobre un cto de índices a una suma típica (con límite superior e inferior), debemos tomar una función biyectiva entre  $\Omega$  y  $\{1, \dots, n\}$

Todo esto para tener la siguiente igualdad

$$\sum_{j \in \Omega} a_j = \sum_{l=1}^n b_l$$

donde  $b_l = a_{f(j)}$

$$\Rightarrow \text{si tomamos } id_{\Omega} : \Omega \rightarrow \{1, \dots, n\} \quad id(n) = n$$

$$\Leftrightarrow id_{\Omega} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \quad id(m) = m$$

$id_{\Omega}$  es biyectiva

$$\rightarrow a_{id_{\Omega}(j)} = a_j \quad \Rightarrow \quad b_l = a_{id_{\Omega}(j)} = a_j$$

$$\rightarrow \sum_{j \in \Omega} a_j = \sum_{l=1}^n b_l$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n a_j \end{aligned}$$

Como  $l$  es un índice y no influye en el resultado lo podemos cambiar por otra letra  
y  $b_l = a_j$



$$\Rightarrow \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^j k + \frac{2^j}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k + \frac{2^j}{j} \quad \textcircled{110}!$$

Aquí sí podemos trabajar

cte para el índice 'k'

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \left( k + \frac{2^j}{j} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j k + \frac{2^j}{j} \sum_{k=1}^j 1 \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{j(j+1)}{2} + \frac{2^j}{j} (j+1-1) \right]$$

$$= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{j^2+j}{2} + \frac{2^j \cdot j}{j} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{j^2+j}{2} + \sum_{j=1}^n 2^j$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j \right) + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right] + 2 \sum_{j=0}^{n-1} 2^j$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right] + 2 \left( \frac{2^n - 1}{2 - 1} \right)$$

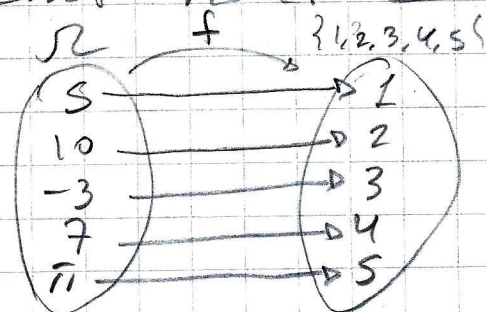
$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right] + 2^{n+1} - 2$$



⊛ Si no entendio la formalidad no se asuste!

Basicamente lo que se hizo fue "ENLISTAR"  
a los elementos de  $\Omega$

por ejemplo si  $\Omega = \{5, 10, -3, 7, \pi\}$  y  $\sum_{k \in \Omega} k$   
podemos hacer la siguiente función biyectiva



con esto luego  
de aplicar "f"  
si me refiero a  
"1" estoy hablando de 5  
a "2" estoy hablando de 10  
a "3" estoy hablando de -3  
a "4" estoy hablando de 7  
a "5" " " " " "

$$\Rightarrow \sum_{k \in \Omega} k = \sum_{j=1}^5 a_j \quad \text{donde } a_j = f(k) \text{ con } k \in \Omega$$

Ahora se puede ver como una suma común  
y corriente!

Otra forma de ver esto es que si  $\Omega = \{1, \dots, n\}$

$$\text{y tengo } \sum_{j \in \Omega} a_j \Rightarrow \sum_{j \in \Omega} a_j = \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j$$



P2

Determine el valor de  $k$  si los coeficientes de  $x^k$  y  $x^{k+1}$  en el desarrollo de  $(3x+2)^{14}$  son iguales

Por Binomio de Newton

$$(3x+2)^{14} = \sum_{k=0}^{14} \binom{14}{k} (3x)^k 2^{14-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{14} \left[ \binom{14}{k} 3^k 2^{14-k} \right] \cdot x^k$$

dado un " $k$ " esto es el coeficiente de  $x^k$

$\Rightarrow$  Si  $x^k$  y  $x^{k+1}$  tienen igual coeficiente

$$\Rightarrow \text{Coeficiente}_k = \text{Coeficiente}_{k+1}$$

$$\rightarrow \binom{14}{k} 3^k 2^{14-k} = \binom{14}{k+1} 3^{k+1} 2^{14-(k+1)}$$

Despejamos  $\Rightarrow$

$$\frac{14!}{(14-k)!k!} 3^k 2^{14-k} = \frac{14!}{(14-(k+1))!(k+1)!} 3^{k+1} 2^{14-(k+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(14-k)(13-k)!k!} = \frac{1}{(13-k)!(k+1)k!} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{14-k} = \frac{1}{(k+1)} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2(K+1) = 3(14-K)$$

$$\rightarrow 2K+2 = 42-3K$$

$$\rightarrow 5K = 40$$

$$\Rightarrow K = 8$$

Luego  $x^8$  y  $x^9$  tienen igual coeficiente  $\square$

**P3** a)  $m, k, n \in \mathbb{N} \quad m \leq k \leq n$

pdq ①  $\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$

Combinatoria: Supongamos que estamos en los juegos de la mano y la sección I que tiene  $n$  alumnos, necesita conformar un equipo de  $k$  jugadores para Basquet. Además entre esos  $k$ , necesito tener  $m$  titulares. ¿Si todos quieren participar, de cuántas formas puedo elegir mi equipo si no hago distinción entre los integrantes de la sección?

Alumno "A" y alumno "B" discuten y dan los siguientes argumentos

$\rightarrow$  Alumno "A": De entre los " $n$ " que somos, voy a elegir a los " $k$ " miembros del equipo, es decir  $\binom{n}{k}$ ,  $\Uparrow$ ... de entre los  $k$  jugadores sacare a los  $m$  titulares, es decir,  $\binom{k}{m}$



Luego la cantidad de formas para elegir mi equipo

será

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{m} \quad (1)$$

$\swarrow$  equipo de  $k$  de  $n$  totales       $\uparrow$  conector " $y$ "       $\nwarrow$   $m$  titulares de los  $k$  miembros

→ Alumno "B": Bakan! pero tengo otra forma de contar, de los " $n$ " alumnos elegire a los " $m$ " titulares de inmediato  $\rightarrow \binom{n}{m}$

y luego de los " $n-m$ " alumnos que me quedan elijo los no titulares que son " $k-m$ "  $\rightarrow \binom{n-m}{k-m}$

Luego la cantidad de formas de elegir es

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{n-m}{k-m} \quad (2)$$

$\swarrow$   $m$  titulares       $\uparrow$  " $y$ "       $\nwarrow$   $k-m$  no titulares

Luego (1) y (2) cuentan lo mismo

$$\therefore \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

MATRACA: pdg  $\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$

$$\Rightarrow \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} = \frac{n!}{(\cancel{n-m})! m!} \cdot \frac{(\cancel{n-m})!}{((n-m)-(k-m))! (k-m)!}$$

NiKITA

$$= \frac{n!}{\underset{\text{green arrow}}{m!}} \cdot \frac{1}{(\underset{\text{red arrow}}{n-k})! (\underset{\text{blue arrow}}{k-m})!} \cdot \frac{k!}{k!}$$

Reordeno

$$= \frac{n!}{(\underset{\text{red arrow}}{n-k})! (\underset{\text{blue arrow}}{k-m})! m!} \cdot \frac{k!}{k!}$$

$$= \binom{n}{k} \binom{k}{m}$$

---

(2) pdg  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Combinatoria: En la sección hay  $n$  alumnos y quiero sacar un grupo de  $k$  estudiantes, sin distinguir entre ellos, ¿De cuantas formas puedo hacerlo?

Forma 1) por definición  $\binom{n}{k}$



Forma 2) Supongamos que Pepita es parte de la sección, tenemos dos formas de obtener  $K$  miembros.

Forma a) Sin pepita  $\cap$ : si no esta pepita, me quedan " $n-1$ " alumnos y debo sacar " $K$ "  $\Rightarrow \binom{n-1}{K}$

Forma b) Con pepita  $\cup$ : si esta pepita en el grupo de  $K$  miembros, me falta elegir " $K-1$ " alumnos que acompañen a pepita de entre el total de alumnos que quedan, que son " $n-1$ "  $\Rightarrow \binom{n-1}{K-1}$

No temas que esta forma de contar es sobre cjos disjuntos. Luego como hay 2 opciones puedo elegir una o la otra

$\Rightarrow$  Cantidad de formas

$$\binom{n-1}{K} + \binom{n-1}{K-1}$$

Obs: si no fueran disjuntos podria contar un grupo más de una vez por lo que tendria que empezar a restarle a lo que conte inicialmente

MATRACA: Ver Pagina 119 Apunte

P3 b) 
$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = 3^n$$

En efecto, por la parte a)

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k}$$

cte para "i"

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i+k-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \cdot 1^i \cdot 1^{(n-k)-i}$$

CAMBIO DE  
INDICE  
EN I

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1+1)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot 1^k$$

Binomio

"I" converge

$$= (2+1)^n = 3^n$$



P4 por  $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$

En efecto,  $(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$

$$= \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j \cdot 1^{2n-j} + \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} (-x)^j \cdot 1^{2n-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j + \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} (-1)^j x^j$$

Sumo bajo  
los mismos  
valores de  
los índices  
desde  
 $0 \rightarrow 2n$

$$= \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j + (-1)^j x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j (1 + (-1)^j)$$

Que ocurre con  $1 + (-1)^j$ ?

Si  $j$  es par  $1 + (-1)^j = 1 + 1 = 2$

Si  $j$  es impar  $1 + (-1)^j = 1 - 1 = 0$

Luego como  $j \in \{0, 1, 2, \dots, 2(n-1), 2n\}$

Me quedare con solamente los  $j$  pares pues  
los  $j$  impares dan como resultado 0

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{2n} \underbrace{\binom{2n}{j} x^j (1 + (-1)^j)}_{a_j} = \sum_{\substack{j \text{ impar} \\ j \in \{0, \dots, 2n\}}} a_j + \sum_{\substack{j \text{ par} \\ j \in \{0, \dots, 2n\}}} a_j$$

$$= 0 + \sum_{\substack{j \text{ par} \\ j \in \{0, \dots, 2n\}}} a_j$$

haciendo  $j = 2k$  (Esto es como con el  $n$ )  
Es biyección)

$$= \sum_{\substack{j=2k \\ j \in \{0, \dots, 2n\}}} a_j$$

$$= \sum_{2k \in \{0, 2, 4, \dots, 2n\}} a_{2k}$$

$$= \sum_{k \in \{0, 1, \dots, n\}} a_{2k} = \sum_{k=1}^n a_{2k}$$

Como  $a_j = \binom{2n}{j} x^j (1 + (-1)^j)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{2k} &= \binom{2n}{2k} x^{2k} (1 + (-1)^{2k}) \\ &= \binom{2n}{2k} x^{2k} \cdot (2) \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j (1 + (-1)^j) = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} x^{2k} \cdot 2$$

$$= 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} x^{2k}$$

Luego Como  $x \in \mathbb{R}$  nunca dijimos que valor tenía por lo que esto funciona para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  en particular  $x=1$

$$\Rightarrow 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} 1^{2k} = 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$$

Esto proviene de  $(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$

$$\Rightarrow \text{Si } x=1 \quad (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$$

$$= 2^{2n} + (0)^{2n}$$

$$= 2^{2n}$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = 2^{2n} \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$$

Con  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario mayor o igual a 1



**PS** a)  $|A| \leq |B| \wedge B \subseteq C \Rightarrow |A| \leq |C|$

por aparte si  $B \subseteq C \Rightarrow |B| \leq |C|$

Luego tenemos  $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C|$

Como  $|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$  inyectiva

Como  $|B| \leq |C| \Leftrightarrow \exists g: B \rightarrow C$  inyectiva

$\Rightarrow g \circ f: A \rightarrow C$  y es inyectiva por  
composición de inyectiva

$\Rightarrow$  Como existe una función inyectiva entre A y C

$\Rightarrow |A| \leq |C|$

b) porq  $|A \times B| = |B \times A|$

Sea  $\varphi: A \times B \rightarrow B \times A$  tq  $\varphi(x, y) = (y, x)$

"los da vuelta"

Veamos que es inyectiva

Sea  $(x, y), (a, b)$  tq  $\varphi(a, b) = \varphi(x, y)$   
 $(b, a) = (y, x) \Rightarrow \begin{matrix} y = b \\ x = a \end{matrix} \Rightarrow (x, y) = (a, b)$   
 $\therefore$  es inyectiva

Veamos epyectividad

Sea  $(e, f) \in B \times A$  me basta tomar el par  $(f, e) \in A \times B$



Luego  $\varphi(f, e) = (e, f)$

$\therefore \varphi$  es epyectiva

$\Rightarrow \varphi$  es biyectiva

Ahora como existe  $\varphi: A \times B \rightarrow B \times A$  biyectiva

$$\Rightarrow |A \times B| = |B \times A|$$