

Propuestas Aux #1

P11

a)

P	q	r	S
V	V	V	V
V	V	F	V
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

¿Cómo encuentro S?

Sencillo, S va a estar completamente definido

por sus filas verdaderas.

Si soy capaz de expresar todas las opciones cuando $S \leftrightarrow V$, obtendré S.

Por ejemplo, en la fila 1 $S \leftrightarrow V$, a partir de aquí nombraremos literalmente a las proposiciones, es decir, si digo "p" haré alusión a que "p se cumple", por el contrario si digo " $\neg p$ " es que "p no se cumple".

⇒ ① S es verdadero en la 1^{era} fila

si: $p \wedge q \wedge r$

② S es verdadero en la 2^{da} fila

si: $p \wedge q \wedge \neg r$

③ $S \leftrightarrow V$ en la 4^{ta} fila

si: $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

①

4) $S \Leftrightarrow V$ en la 8^{va} fila

si $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

Luego en alguno de estos casos $S \Leftrightarrow V$

$$\therefore S \Leftrightarrow \left[\overset{1 \text{ fila}}{(p \wedge q \wedge r)} \vee \overset{2 \text{ fila}}{(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)} \vee \overset{4 \text{ fila}}{(\neg p \wedge q \wedge \neg r)} \vee \dots \vee \underset{8 \text{ fila}}{(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)} \right]$$

TAREA: Verificar esto!

b) Probar que $S \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

Forma 1) Con casos: Si $S \Leftrightarrow F$ es trivial.

Supongamos que $S \Leftrightarrow V$, en 3 casos $p \Leftrightarrow V$ y obtenemos

$$\begin{aligned} & \underbrace{S \Rightarrow (r \Rightarrow p)} \\ & \Leftrightarrow V \Rightarrow (r \Rightarrow \underbrace{V}) \\ & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\qquad \qquad \qquad} V \\ & \Leftrightarrow V \end{aligned}$$

Luego si nos ponemos en el caso que $S \Leftrightarrow V$ y $p \Leftrightarrow F$, luego $r \Leftrightarrow F$

y tenemos

$$S \Rightarrow (r \Rightarrow p)$$

$$\Rightarrow V \Rightarrow (F \Rightarrow F)$$

$$\Leftrightarrow V \Rightarrow V \Leftrightarrow V$$

es tautología / Forma 2) MATRACA / simbólica

c) Toda tabla de verdad tiene proposición lógica asociada, basta construirla.

p2) Demuestre usando exploratoria

$$a) \underbrace{[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p]}_A \Leftrightarrow \underbrace{(p \wedge q)}_B$$

2 casos, se separan $A \Leftrightarrow B$ en $A \Rightarrow B$ y $B \Rightarrow A$

Caso 1) $A \Rightarrow B$

$\Rightarrow$ Supongamos que $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p] \Leftrightarrow V$

Luego "p" y "(p $\Rightarrow$ q)" tienen el mismo

valor de verdad, el cual es V, ya que

$$\text{si fuese } F \Rightarrow p \Leftrightarrow F \quad p \Rightarrow q \Leftrightarrow F$$

$$\text{Contradicción} \Rightarrow p \Leftrightarrow V \wedge q \Leftrightarrow F$$

$$\text{Luego } p \Leftrightarrow V \quad \text{y} \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V \\ \Rightarrow q \Leftrightarrow V$$

$$\text{Luego } \underbrace{p \wedge q}_B \Leftrightarrow V$$

Caso 2 $A \Leftrightarrow B$

$$\Leftrightarrow \text{ si } p \wedge q \Leftrightarrow V \Rightarrow p \Leftrightarrow V \wedge q \Leftrightarrow V$$

$$\Rightarrow (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{A} \Leftrightarrow p$$

$$\therefore [(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p] \Leftrightarrow (p \wedge q) \text{ es tautología}$$

Nota: Los casos de hipotesis falsa los descarto pues es el caso trivial

$$b) [(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)]$$

Supongamos que la hipótesis

$$[(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)] \Leftrightarrow V$$

} si es falso, es trivial la tautología

tratemos de demostrar que $[(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)]$ es verdadero.

Si: $[(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)] \Leftrightarrow V$ hay 2 casos

Caso 1) tanto $(p \vee q)$ como $(p \wedge r)$ son falsos

$$\begin{aligned} \Rightarrow p \vee q &\Leftrightarrow F & \Rightarrow p &\Leftrightarrow F \\ & & \wedge q &\Leftrightarrow F \\ & & \wedge r &\text{ no se sabe} \end{aligned}$$

Luego $q \Rightarrow p \Leftrightarrow F \Rightarrow F \Leftrightarrow V$

$\wedge p \Rightarrow r \Leftrightarrow F \Rightarrow r \Leftrightarrow V$

$\therefore (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow V$

Caso 2) $p \vee q$ y $p \wedge r$ son verdaderos

$$\Rightarrow \quad p \wedge r \Leftrightarrow V \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} p \Leftrightarrow V \\ \wedge \quad r \Leftrightarrow V \\ \wedge \quad q \text{ no se sabe} \end{array}$$

Luego $q \Rightarrow p \Leftrightarrow q \Rightarrow V \Leftrightarrow V$

$$\wedge \quad p \Rightarrow r \Leftrightarrow V \Rightarrow V \Leftrightarrow V$$

$$\therefore (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow V$$

$\therefore$ la implicancia es tautología

P3) $p \vdash q \Leftrightarrow \exists r \vdash q, p \Rightarrow r \wedge r \Rightarrow q$

Probar que $(p \vdash q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

Separaremos en 2 implicancias

$\Rightarrow$ Supongamos que $p \vdash q \Leftrightarrow V$

Luego $\exists r$ tal que $p \Rightarrow r \wedge r \Rightarrow q$, por transitividad de " $\Rightarrow$ ",

$$[p \Rightarrow r \wedge r \Rightarrow q] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

por lo que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$

$\Leftarrow$ Supongamos que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$, Luego

podemos tomar $r = p$, proposición y hacemos una especie de "transitividad"

$$p \Rightarrow r \wedge r \Rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow p \Rightarrow p \wedge p \Rightarrow q \quad \text{pues } r = p$$

$$\Leftrightarrow V \wedge V \quad \text{por hipótesis}$$

$$\Leftrightarrow V$$

∴ Como $\exists r$ tal que

$$(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$$

entonces $p \vdash q \Leftrightarrow V$

Finalmente como ambas implicancias son Verdaderas, la proposición original es Verdadera

24) "Si los 123 residentes suman en edad 3813 años, entonces existen 100 de ellos cuyas edades suman al menos 3100"

Pasemos esto a logica

$P :=$ Los 123 residentes suman 3813

$Q :=$ existen 100 de ellos cuyas edades suman al menos 3100

Luego debemos probar $P \Rightarrow Q$

Procedamos por contradicción.

Supongamos que $P \Leftrightarrow V$

$$\neg (Q \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Leftrightarrow V)$$

es decir, se cumple que ① las 123 personas suman 3813 y además se cumple que

② Para cualquier grupo de 100 de ellos, las edades del grupo serán menor a 3100.

de ② como cualquier grupo de 100 suma menos de 3100, en particular puedo tomar el grupo de los 100 mayores, los llamo $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ y al resto $p_1, p_2, \dots, p_{23}$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{100} < 3100 \quad / \cdot \frac{1}{100} \quad \text{veamos el promedio de edad}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{100}}{100} < 31$$

$$\Rightarrow \overline{a} < 31$$

Luego Como el promedio de los mayores es menor que 31, entonces, $\bar{a}_*$ tal que $a_* < 31$ (es decir, si las 100 personas promediamos en edad menor que 31, es porque hay al menos una persona más chica que 31)

Luego Como $a_* < 31$ y aun así pertenece al grupo de los más viejos

$$\Rightarrow P_1 < a_* < 31$$

$$P_2 < a_* < 31$$

⋮

$$P_{23} < a_* < 31$$

$P_1, \dots, P_{23}$
eran los
restantes

$\Rightarrow$

$$P_1 + P_2 + \dots + P_{23} < 23 \cdot 31$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1 + P_2 + \dots + P_{23} < 713} \quad \textcircled{a}$$

Pero por otro lado Como

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} < 3100$$

$\Rightarrow$ (b) $P_1 + P_2 + \dots + P_{23} > 713$ para
que todos sumen 3813

Luego como ocurre a y b , se llega
a una contradicción