**MA1101-1 Introducción al Álgebra**
**Profesor:** Leonardo Sánchez C.
**Auxiliar:** Marcelo Navarro

# Examen 2017

**P1.** Sean $u, v, w \in \mathbb{C}$. Considere el sistema de ecuaciones $(s)$, dado por:

$$(s) = \begin{cases} u + v + w & = 4 \\ uvw & = 4 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} & = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ el polinomio dado por $P(x) = (x-u)(x-v)(x-w)$, donde $u, v, w$ son las soluciones del sistema (s)

I) Pruebe que $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$

**Desarrollo:** Es tentativo resolver el sistema $(s)$. Sin embargo, notemos que por ejemplo el termino constante del polinomio es cuando obtenemos el producto $uvw$, y toda solución del sistema $(s)$ debe cumplir simultáneamente las 3 ecuaciones, por lo que $uvw = 4$ lo podemos usar directamente sin saber los valores de $u, v$ o $w$. Así que, en virtud de esto multipliquemos todos los paréntesis.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-u)(x-v)(x-w) \\ &= (x^2 - (u+v)x + uv)(x-w) \\ &= x^3 - (u+v)x^2 + uvx - wx^2 + w(u+v)x - uvw \\ &= x^3 - (u+v+w)x^2 + (uv+uw+vw)x - uvw \\ &= x^3 - 4x^2 + (uv+uw+vw)x - 4 \qquad\qquad /1 \text{ y } 2 \text{ ecuación de (s)} \end{aligned}$$

Ahora para saber cual es el valor de $uv + uw + vw$, basta con simplemente multiplicar la segunda ecuación con la tercera del sistema $(s)$. Luego se obtiene que

$$uvw \cdot \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right) = \frac{3}{2} \cdot 4$$

multiplicando y simplificando se obtiene

$$uv + uw + vw = 6$$

Finalmente

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

II) Factorice $P(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

**Desarrollo:** Notemos que no podemos empezar a factorizar sin saber al menos un raíz del polinomio $P$. Asi que ocuparemos el teorema de las raices racionales para encontrar un candidato.

Nuestros candidatos serán $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Pueden darse cuenta evaluando que $P(1) \neq 0$ y que $P(-1) \neq 0$.
Probemos ahora $x = 2$

$$P(2) = 2^3 - 4(2)^2 + 6(2) - 4 = 8 - 16 + 12 - 4 = 20 - 20 = 0$$

Por lo que $x = 2$ es raíz de $P$, es decir, $(x-2)$ divide a $P$. En virtud de esto dividamos.

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 4x^2 + 6x - 4\big) : \big(x - 2\big) = x^2 - 2x + 2 \\
\underline{-\,x^3 + 2x^2} \\
\qquad -\,2x^2 + 6x \\
\qquad \underline{\;\;2x^2 - 4x} \\
\qquad\qquad\quad 2x - 4 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Luego $P(x) = (x-2)(x^2 - 2x + 2)$, busquemos las raíces de $(x^2 - 2x + 2)$ usando la formula para raíces cuadráticas.

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

Por lo que las raices son $2, 1 + i, 1 - i$.

La factorización en $\mathbb{C}[x]$ queda $P(x) = (x-2)(x - (1+i))(x - (1-i))$

La factorización en $\mathbb{R}[x]$ queda $P(x) = (x-2)(x^2 - 2x + 2)$.

**P2.** I) Calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)}$

<u>**Desarrollo:**</u> Notemos que para la sumatoria de más adentro, tanto $n$ y $k$ son constantes, ya que la dependencia de esta sumatoria solo esta vinculada con el índice $j$. Por lo que podemos sacar $n+k$ para afuera. Luego buscaremos una forma de realizar una telescópica y posteriormente terminaremos usando una suma conocida.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)} &= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(n+j-1)(n+j)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\sum_{j=1}^{k}\frac{1+(n+j)-(n+j)}{(n+j-1)(n+j)} \qquad \textit{/nikita nipone}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1-(n+j)}{(n+j-1)(n+j)}+\frac{(n+j)}{(n+j-1)(n+j)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\cancel{1-(n+j)}}{\cancel{(n+j-1)}(n+j)}+\frac{\cancel{(n+j)}}{(n+j-1)\cancel{(n+j)}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{-1}{(n+j)}+\frac{1}{(n+j-1)}\right) \qquad \textit{/telescopica}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\left(\frac{-1}{(n+(k))}+\frac{1}{(n+(1)-1)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-(n+k)}{n+k}+\frac{(n+k)}{n}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(-1+1+\frac{k}{n}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\\
&= \frac{(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

II) Determine $\rho \geq 0$ y $\varphi$ en función de $\theta \in [0, \pi]$ tales que $\rho e^{i\varphi} = 1 + e^{i\theta}$.
Recuerde que: $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha)$ y
$cos(2\alpha) = 2cos^2(\alpha) - 1$

**Desarrollo:** Recordemos que para resolver una ecuación con complejos tenemos que tener una igualdad del estilo $Re^{i\gamma} = re^{i\beta}$. De aqui podemos decir que $R = r$ y que $\gamma = \beta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Es por esto que trataremos de forzar a que la igualdad $\rho e^{i\varphi} = 1 + e^{i\theta}$, sea de la misma forma.
*Forma 1)* En efecto, notemos que si elevamos al cuadrado, podremos estudiar $(\rho e^{i\varphi})^2 = (1 + e^{i\theta})^2$. Entonces

$$\begin{align*}
\rho^2 e^{i2\varphi} &= (1 + e^{i\theta})^2 \\
&= 1 + 2e^{i\theta} + (e^{i\theta})^2 \\
&= 1 + 2e^{i\theta} + e^{i2\theta} \\
&= 1 + 2e^{i\theta} + (cos(2\theta) + isen(2\theta)) \\
&= 1 + 2e^{i\theta} + [2cos^2(\theta) - 1] + i(2sen(\theta)cos(\theta)) \tag{0} \\
&= \cancel{1} + 2e^{i\theta} + 2cos^2(\theta) - \cancel{1} + i(2sen(\theta)cos(\theta)) \\
&= 2[cos(\theta) + isen(\theta)] + 2cos^2(\theta) + i(2sen(\theta)cos(\theta)) \\
&= 2cos(\theta) + 2isen(\theta) + 2cos^2(\theta) + 2isen(\theta)cos(\theta) \\
&= cos(\theta)[2 + 2cos(\theta)] + isen(\theta)[2 + cos(\theta)] \\
&= [2 + 2cos(\theta)](cos(\theta) + isen(\theta)) \\
&= [2 + 2cos(\theta)]e^{i\theta}
\end{align*}$$

En donde se uso el hint en la igualdad (0).

Luego se tiene que $\rho^2 e^{i2\varphi} = [2 + 2cos(\theta)]e^{i\theta}$ que es de la forma planteada anteriormente. Entonces se puede obtener que

$$\begin{align*}
\rho^2 &= 2 + 2cos(\theta) \tag{1} \\
2\varphi &= \theta + 2k\pi \tag{2}
\end{align*}$$

De (1) como $\rho \geq 0$ se tiene que $\rho = \sqrt{2 + 2cos(\theta)}$, notando que $2 + 2cos(\theta) \geq 0$ siempre

De (2) se tiene que $\varphi = \frac{\theta}{2} + k\pi$ con $k = 0, 1$.
Sin embargo, de la primera igualdad que teniamos, dada por el enunciado, se tiene que $\rho e^{i\varphi} = 1 + e^{i\theta}$. De aqui, transformando directamente a cosenos y senos, es posible llegar a que se debe cumplir que $\rho sin(\varphi) = sin(\theta)$. Como $\rho \geq 0$, entonces obligatoriamente $sin(\varphi)$ y $sin(\theta)$ tienen el mismo signo. Además como $\theta \in [0, \pi]$, entonces $sin(\theta) \geq 0$. Luego $sin(\varphi) \geq 0$ por lo que $\varphi \in [0, \pi]$.

**obs**: Este estudio se pudo hacer de muchas maneras, incluso no era necesario colocar el $2k\pi$ en la igualdad de los ángulos si se estudio esto previamente

Por lo tanto de lo obtenido anteriormente, $\varphi = \frac{\theta}{2} + k\pi$ con $k = 0, 1$, tenemos que asegurarnos que $\varphi$ se mantenga en $[0, \pi]$. Luego si $k = 1$, se tiene que $\varphi = \frac{\theta}{2} + k\pi \in [\pi, 2\pi]$, por lo que no nos sirve. Asi que nos quedamos con $k = 0$ y podemos darle al valor de $\varphi$ la periodicidad correspondiente

Finalmente los valores obtenidos son $\rho = \sqrt{2 + 2cos(\theta)}$ y $\varphi = \frac{\theta}{2} + 2k\pi$, notar que el $2k\pi$ no influye en nada, solamente estaré describiendo el angulo $\frac{\theta}{2}$ de maneras distintas. Por lo que simplemnente nos podemos quedar con $\rho = \sqrt{2 + 2cos(\theta)}$ y $\varphi = \frac{\theta}{2}$.
Puede ver un ejemplo numerica en el siguiente link
Link a ejemplo

*Forma 2)* Eduardo me dio este resultado, claramente es mucho fácil de lo que se me ocurrió a mi
En efecto, tirémonos a desarrollar de inmediato

$$\begin{aligned}
\rho e^{i\varphi} &= 1 + e^{i\theta} \\
&= 1 + cos(\theta) + isen(\theta) \\
&= 1 + cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) + isen\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \\
&= 1 + [2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1] + i[2sen\left(\frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\theta}{2}\right)] \\
&= \cancel{1} + 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cancel{1} + 2isen\left(\frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2cos\left(\frac{\theta}{2}\right)[cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + isen\left(\frac{\theta}{2}\right)] \\
&= 2cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

Luego $\rho = 2cos(\frac{\theta}{2})$ y $\varphi = \frac{\theta}{2} + 2k\pi$. Que es equivalente al resultado anterior ya que es el mismo angulo y el valor de $\rho$ también. Basta con notar lo siguiente

$$\begin{aligned}
cos(\theta) &= 2cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1 \\
1 + cos(\theta) &= 2cos^2(\frac{\theta}{2}) \\
2 + 2cos(\theta) &= 4cos^2(\frac{\theta}{2}) \\
\sqrt{2 + 2cos(\theta)} &= 2cos(\frac{\theta}{2})
\end{aligned}$$

**P3.** Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $v \in \mathbb{C}$ un número complejo cualquiera.
Considere el conjunto $R_v = \{z \in \mathbb{C} \mid z$ es la raíz enésima de $v\}$ y $U = \{w \in \mathbb{C} \mid w$ es la raíz enésima de $1\}$
Tomemos tambien $\hat{z}$ un elemento fijo de $R_v$. Definimos en $R_v$ la ley $*$ por:

$$\forall z, z' \in R_v, \quad z * z' = \frac{z \cdot z'}{\hat{z}}$$

*a)* Demuestre que $*$ es ley de composición interna en $R_v$.

**Desarrollo:** dados $z_1$ y $z_2$ en $R_v$ arbitrarios, debemos mostrar que $z_1 * z_2$ también esta en $R_v$. Es decir, tenemos que probar que $z_1 * z_2$ es raíz enésima de $v$ al igual que $z_1$ y $z_2$. En efecto, sea $z_1, z_2 \in R_v$ arbitrarios, estudiemos $(z_1 * z_2)^n$ (si llegamos a que es igual a $v$ ganamos).

$$\begin{aligned}
(z_1 * z_2)^n &= \left(\frac{z_1 \cdot z_2}{\hat{z}}\right)^n \\
&= \frac{z_1^n \cdot z_2^n}{(\hat{z})^n} && /z_1, z_2, \hat{z} \in R_v \\
&= \frac{v \cdot v}{v} \\
&= \frac{v \cdot \cancel{v}}{\cancel{v}} \\
&= v
\end{aligned}$$

Luego el complejo $z_1 * z_2$ es raíz enésima de $v$ por lo tanto $z_1 * z_2 \in R_v$

*b)* Pruebe que $\varphi : (R_v, *) \to (U, \cdot)$ tal que $\varphi(z) = \dfrac{z}{\hat{z}}$ es un isomorfismo.

**Desarrollo:** Debemos probar que $\varphi$ es una función biyectiva y que es morfismo.

- [***Bien definida***] En efecto, veamos que esta bien definida (no sé si esto lo pedian en la pauta, pero hay que asegurarnos que efectivamente $\varphi$ es una función).
  Sea $z \in R_v$ arbitrario, debemos probar que $\varphi(z) \in U$. Esto es verdad ya que

  $$\varphi(z)^n = \left(\frac{z}{\hat{z}}\right)^n = \frac{z^n}{\hat{z}^n} = \frac{v}{v} = 1$$

  Luego $\varphi(z)$ es raíz enésima de 1, por lo tanto $\varphi(z) \in U$ para todo $z \in R_v$.

- [***Inyectiva***] Veamos ahora la inyectividad, la idea es pensar la función como si fuera una recta del estilo $y = \frac{x}{a}$ (recordar que $\hat{z}$ es fijo) de esta manera el trabajo será mucho más facil. Sean $z_1, z_2 \in R_v$ tal que $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. Probemos que $z_1 = z_2$.
  En efecto:

$$\begin{aligned} & \varphi(z_1) = \varphi(z_2) & \\ \Rightarrow \quad & \frac{z_1}{\hat{z}} = \frac{z_2}{\hat{z}} & / \cdot \hat{z} \\ \Rightarrow \quad & \frac{z_1}{\hat{z}} \cdot \hat{z} = \frac{z_2}{\hat{z}} \cdot \hat{z} & \\ \Rightarrow \quad & \frac{z_1}{\cancel{\hat{z}}} \cdot \cancel{\hat{z}} = \frac{z_2}{\cancel{\hat{z}}} \cdot \cancel{\hat{z}} & \\ \Rightarrow \quad & z_1 = z_2 & \end{aligned} \tag{3}$$

  Por lo tanto $\varphi$ es inyectiva.

- [***Epiyectiva***] Sea $y \in U$ arbitrario, debemos encontrar un $z \in R_v$ (ojo con el $\in R_v$) tal que $\varphi(z) = y$.

  *Idea: Espero que en este momento sigamos pensando en una recta. Si por ejemplo en la recta $y = \dfrac{x}{a}$ quiero obtener un valor $p$, me basta con tomar $x = a \cdot p$ ya que $\dfrac{a \cdot p}{a} = p$. Del mismo modo atacaremos el problema.*

  Notemos que si quiero obtener $y \in U$, me basta tomar $z = y \cdot \hat{z}$ ya que $\varphi(z) = \varphi(y \cdot \hat{z}) = \dfrac{y \cdot \hat{z}}{\hat{z}} = y$. Para que esto sea valido tenemos que verificar $z = y \cdot \hat{z} \in R_v$, es decir $y \cdot \hat{z}$ debe ser un valor que pueda tomar la función $\varphi$ en su dominio , de otro modo deberiamos buscar otro metodo para demostrar epiyectividad
  Para esto debemos estudiar $(y \cdot \hat{z})^n$ con ayuda de que $y \in U$ y $\hat{z} \in R_v$. Entonces

$$(y \cdot \hat{z})^n = y^n \cdot \hat{z}^n = 1 \cdot v = v$$

  Esto ultimo ya que como $y \in U$, entonces $y$ es raíz enésima de 1 y como $\hat{z} \in R_v$, entonces $\hat{z}$ es raíz enésima de $v$.
  Por lo tanto $z = y \cdot \hat{z} \in R_v$ y con esto completamos la demostración de epiyectividad.

- [***Morfismo***] Sea $z_1, z_2 \in R_v$ arbitarios. Debemos probar que $\varphi(z_1 * z_2) = \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2)$. En efecto,

$$\begin{aligned}\varphi(z_1 * z_2) &= \frac{z_1 * z_2}{\hat{z}} \\ &= \frac{\frac{z_1 \cdot z_2}{\hat{z}}}{\hat{z}} \\ &= \frac{z_1 \cdot z_2}{\hat{z} \cdot \hat{z}} \\ &= \frac{z_1}{\hat{z}} \cdot \frac{z_2}{\hat{z}} \\ &= \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2)\end{aligned}$$

  Por lo tanto $\varphi$ es morfismo y finalmente por todo lo anterior es isomorfismo.

*c*) Pruebe que $(R_v, *)$ es grupo abeliano.

**Desarrollo:** Ya tenemos que $*$ es lci en $R_v$. Tenemos que probar que $*$ es asociativo, conmutativo, posee neutro y todo elemento es invertible. Partamos por conmutatividad para ahorrarnos desarrollo

- [***Conmutatividad***] Sea $x, y \in R_v$ arbitrarios, debemos probar que $x * y = y * x$. En efecto, como $\cdot$ es conmutativo en $\mathbb{C}$ se tiene que

$$x * y = \frac{x \cdot y}{\hat{z}} = \frac{y \cdot x}{\hat{z}} = y * x$$

  Luego $*$ es conmutativo

- [***Asociatividad***] Sea $x, y, z \in R_v$ arbitrarios, debemos probar que $[(x * y) * z] = [x * (y * z)]$.
  En efecto, como $\cdot$ es asociativo en $\mathbb{C}$ se tiene que

$$[(x * y) * z] = \left(\frac{x \cdot y}{\hat{z}}\right) * z = \frac{\left(\frac{x \cdot y}{\hat{z}}\right) \cdot z}{\hat{z}} = \frac{x \cdot \left(\frac{y \cdot z}{\hat{z}}\right)}{\hat{z}} = x * \left(\frac{y \cdot z}{\hat{z}}\right) = [x * (y * z)]$$

  Luego $*$ es asociativo

- [***Neutro***] Propongo $\hat{z} \in R_v$ como el neutro (se puede plantear una ecuación para encontrar la propuesta), verifiquemos que cumple con ser neutro, es decir, cumple que $\forall x \in \mathbb{R}_v, x * \hat{z} = \hat{z} * x = x$. Notemos que como ya demostramos conmutatividad, solo debemos verificar la operación por un solo lado.
  En efecto, Sea $x \in R_v$ arbitrario. Entonces

$$x * \hat{z} = \frac{x \cdot \hat{z}}{\hat{z}} = \frac{x \cdot \cancel{\hat{z}}}{\cancel{\hat{z}}} = x$$

  Por lo tanto $\hat{z} \in R_v$ es el neutro de $*$

- [***Inversos***] Dado $x \in R_v$ cualquiera, debemos encontrar un $y \in R_v$ tal que $x * y = y * x = \hat{z}$ donde $\hat{z}$ es el neutro.

  Notemos que si se llegase a cumplir lo pedido, se tendrá obligatoriamente que

$$\begin{aligned} x * y &= \hat{z} \\ \frac{xy}{\hat{z}} &= \hat{z} \\ xy &= \hat{z}^2 \\ y &= \frac{\hat{z}^2}{x} \end{aligned}$$

  Luego, dado $x \in R_v$ arbitrario propongo la siguiente expresión como su inverso $\frac{\hat{z}^2}{x}$. Verifiquemos

$$x * \frac{\hat{z}^2}{x} = \frac{x \cdot \frac{\hat{z}^2}{x}}{\hat{z}} = \frac{\cancel{x} \cdot \frac{\hat{z}^2}{\cancel{x}}}{\hat{z}} = \frac{\hat{z}^2}{\hat{z}} = \hat{z}$$

  Luego dado $x \in R_v$ se tiene que su inverso será $\frac{\hat{z}^2}{x}$ pero esto no es totalmente cierto, falta ver que $\frac{\hat{z}^2}{x} \in R_v$. Estudiemos $\left(\frac{\hat{z}^2}{x}\right)^n$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hat{z}^2}{x}\right)^n &= \frac{(\hat{z}^2)^n}{x^n} \\ &= \frac{(\hat{z}^n)^2}{v} \\ &= \frac{v^2}{v} \\ &= v \end{aligned}$$

  Luego si $x \in R_v$, entonces $\frac{\hat{z}^2}{x}$ es raíz enésima de $v$, por lo que $(x^{-1}) = \frac{\hat{z}^2}{x} \in R_v$ es inverso de $x$. Como $x$ fue arbitrario, se concluye que todos los elementos de $R_v$ tienen inverso
  Y finalmente $(R_v, *)$ es grupo abeliano.