MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Examen 2016 - P2

P2. I) Sean $z, w \in C$ tales que $\overline{z}w \neq 1$, $|z| = 1$, o $|w| = 1$. probar que $|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}| = 1$.

En efecto, notemos que dentro de nuestras hipótesis hay una disyunción por lo que debemos ponernos en dos casos.

caso 1) supongamos que $|z| = 1$ (w da lo mismo), desarrollemos el lado izquierdo notando que podemos usar un 1 conveniente.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| &= \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| \cdot \left|\frac{z}{z}\right| \\
&= \frac{|z-w||z|}{|1-\overline{z}w||z|} \\
&= \frac{|z-w||z|}{|(1-\overline{z}w)z|} \\
&= \frac{|z-w||z|}{|z-\overline{z}wz|} \\
&= \frac{|z-w||z|}{|z-\overline{z}zw|} \\
&= \frac{|z-w||z|}{|z-|z|^2w|} \\
&= \frac{|z-w||z|}{|z-1\cdot w|} \\
&= \frac{\cancel{|z-w|}|z|}{\cancel{|z-w|}} \\
&= |z| \\
&= 1
\end{aligned}$$

Vean ustedes las justificaciones de los pasos

caso 2) supongamos que $|w| = 1$ (z da lo mismo), desarrollemos el lado izquierdo notando que podemos usar un 1 conveniente.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| &= \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| \cdot \left|\frac{w}{w}\right| \\
&= \frac{|z-w||w|}{|1-\overline{z}w||w|} \\
&= \frac{|z-w||w|}{|1-\overline{z}w||\overline{w}|} \\
&= \frac{|z-w||w|}{|(1-\overline{z}w)\overline{w}|} \\
&= \frac{|z-w||w|}{|\overline{w}-\overline{z}w\overline{w}|} \\
&= \frac{|z-w||w|}{|\overline{w}-\overline{z}|w|^2|} \\
&= \frac{|z-w||w|}{|\overline{w}-\overline{z}\cdot 1|} \\
&= \frac{|z-w||w|}{|\overline{w}-\overline{z}|} \\
&= \frac{|z-w||w|}{|\overline{(w-z)}|} \\
&= \frac{|z-w||w|}{|w-z|} \\
&= \frac{|z-w||w|}{|z-w|} \\
&= \frac{\cancel{|z-w|}|w|}{\cancel{|z-w|}} \\
&= |w| \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo que se tiene lo pedido, en ambos casos $|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}| = 1$.

II) Sea el polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ de grado $2n+2$ y sean $\{i, i\sqrt{2}, i\sqrt{3}, \ldots, , i\sqrt{n}\}$ n de sus raices. Encuentre todas las raíces de $p(x)$ sabiendo que:
$p(0) = n!,\ p(1) = (n+1)!,\ p(2) = \frac{1}{8}(n+4)!$

En efecto, notemos que como $p \in \mathbb{R}[x]$ (sus coeficientes están en $\mathbb{R}$), si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de p entonces $\overline{z}$ también es raíz. Luego como $\{i, i\sqrt{2}, i\sqrt{3}, \ldots, , i\sqrt{n}\}$ son raíces, en virtud de este argumento, se tiene que $\{-i, -i\sqrt{2}, -i\sqrt{3}, \ldots, , -i\sqrt{n}\}$ también son raíces (y hay 1 por cada raíz que me da el enunciado por lo que son n nuevas raices que encontramos). En total encontramos hasta el momento $2n$ raíces, falta por encontrar 2.

Para esto, notemos que como $\{\pm\imath, \pm i\sqrt{2}, \pm i\sqrt{3}, \ldots, , \pm i\sqrt{n}\}$ son raíces, entonces se tiene lo siguiente

$$(x-i)(x+i)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})\ldots(x-i\sqrt{n})(x+i\sqrt{n}) \mid p(x)$$

Es decir el producto de los polinomios que contienen a las raíces divide al polinomio p. Ahora notemos que

$$(x-i)(x+i)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})\ldots(x-i\sqrt{n})(x+i\sqrt{n}) = (x^2+1)(x^2+2)\ldots(x^2+n)$$

Por lo que podemos decir que $p(x)$, que tiene grando $2n+2$, lo podemos escribir de la siguiente forma

$$p(x) = (x^2+1)(x^2+2)\ldots(x^2+n)q(x) = (x^2+1)(x^2+2)\ldots(x^2+n)(ax^2+bx+c)$$

donde $q(x) = ax^2+bx+c$, esto pues el producto de los polinomios que contenían a las raíces nos daba grado $2n$ y para llegar a grado $2n+2$ nos falta un polinomio de grado 2.

Ahora si podemos ocupar las condiciones que nos dan. Calculemos $p(0), p(1), p(2)$

$$p(0) = (0^2+1)(0^2+2)\ldots(0^2+n)(a\cdot 0^2+b\cdot 0+c) = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot c = n!c$$

pero el enunciado dice que $p(0) = n!$, entonces

$$n! = n!c \Rightarrow c = 1$$

Luego tenemos que $p(x) = (x^2+1)(x^2+2)\ldots(x^2+n)(ax^2+bx+1)$, veamos $p(1)$

$$p(1) = (1^2+1)(1^2+2)\ldots(1^2+n)(a\cdot 1^2+b\cdot 1+1) = 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot(a+b+1) = (n+1)!(a+b+1)$$

Pero por enunciado sabemos que $p(1) = (n+1)!$, entonces

$$(n+1)! = (n+1)!(a+b+1) \Rightarrow a+b+1 = 1 \Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow b = -a$$

Luego tenemos que $p(x) = (x^2+1)(x^2+2)\ldots(x^2+n)(ax^2-ax+1)$, veamos $p(2)$

$$\begin{aligned} p(2) &= (2^2+1)(2^2+2)\ldots(2^2+n)(a\cdot 2^2-a\cdot 2+1) \\ &= 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(n+4)\cdot(4a-2a+1) \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot(4a-2a+1) \\ &= \frac{(n+4!)}{24}\cdot(4a-2a+1) \end{aligned}$$

pero el enunciado dice que $p(2) = \frac{1}{8}(n+4)!$, entonces

$$\frac{(n+4!)}{24}\cdot(4a-2a+1) = \frac{1}{8}(n+4)! \Rightarrow (2a+1) = 3 \Rightarrow a = 1$$

Finalmente nuestro polinomio queda

$$p(x) = (x^2+1)(x^2+2)\ldots(x^2+n)(x^2-x+1)$$

Nos queda calcular las raíces de $q(x) = x^2-x+1$ y terminamos

Ocupemos la formula $q(x) = 0$

$$q(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Finalmente las raices que faltaban eran $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$