

Aux #15

P1

$$p(x) = (2+f) + (e+f)x + (a-d)x^4 + (2a+c)x^5 + (a+b)x^7$$

$$q(x) = 3 + (f+2)x + (a+b+c+d)x^3 + (b+c+1)x^4 + bx^5$$

Determinar $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que $p = q$

Dos polinomios son iguales si los coeficientes asociados respectivamente a los terminos x^k son iguales

$\Rightarrow$

$p \quad q$

Ec0 x^0

$$2+f = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{f=1}$$

Ec1 x^1

$$e+f = f+2$$

$$\Rightarrow \boxed{e=2}$$

Ec2 x^2

$$0 = 0$$

Ec7 $\Rightarrow 0 = c+d$

Ec3 x^3

$$0 = a+b+c+d$$

$$\Rightarrow a-1 = b+c+d \quad \textcircled{*}$$

Ec4 x^4

$$a-d = b+c+1$$

Ec5 x^5

$$2a+c = b$$

Ec6 x^6

$$0 = 0$$

Ec7 x^7

$$a+b = 0$$

$\textcircled{*}$ en **Ec3** $\Rightarrow 0 = a + (b+c+d)$
 $= a + (a-1)$
 $= 2a - 1$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \xRightarrow{\text{Ec7}} \boxed{b = -\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ de **Ec5** $2a+c = b \Rightarrow 1+c = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{c = -\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{d = \frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$c = -\frac{3}{2}$$

$$d = \frac{3}{2}$$

$$e = 2$$

$$f = 1$$

$$\begin{aligned} P(x) = q(x) &= 3 + 3x + 0x^2 + 0x^3 + (-1)x^4 + (-\frac{1}{2})x^5 \\ &\quad + 0x^6 + 0x^7 \\ &= 3 + 3x - x^4 - \frac{1}{2}x^5 \end{aligned}$$

P2 Factorizar en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

Desarrollo: Notemos que los coeficientes están en $\mathbb{Z}$,
busquemos una raíz en virtud de teo de la raíz racional
proceso de búsqueda

$$\Rightarrow \text{Si } \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \text{ es raíz de } p \Rightarrow r \mid p_0 \wedge s \mid p_4$$

$$\Rightarrow r \mid -15 \wedge s \mid 1$$

$$\Rightarrow s \mid 1 \Rightarrow s = 1 \text{ (también puede ser } s = \pm 1)$$

$$\Rightarrow r \mid -15 \Rightarrow r \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{s} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$$

Busquemos si algún elemento de estos es raíz

$$p(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 - 15 = -36$$

$$p(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 - 12(-1)^2 - 13(-1) - 15 = -16$$

$$\begin{aligned} p(3) &= 3^4 + 3 \cdot 3^3 - 12(3)^2 - 13(3) - 15 = 2 \cdot 3^4 - 43^3 - 39 - 15 \\ &= 23^3(3 - 2) - 54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow p(3) &= 2 \cdot 3^3 - 54 \\ &= 2 \cdot 27 - 54 \\ &= 54 - 54 = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3 \text{ es raíz} \iff (x-3) \mid p(x)$$

$$\begin{array}{r} \Rightarrow x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15 : x-3 = x^3 + 6x^2 + 6x + 5 \\ \underline{-(x^4 - 3x^3)} \\ 6x^3 - 12x^2 - 13x - 15 \\ \underline{-(6x^3 - 18x^2)} \\ 6x^2 - 13x - 15 \\ \underline{-(6x^2 - 18x)} \\ 5x - 15 \\ \underline{-(5x - 15)} \\ 0 \end{array}$$

$\rightarrow$ Resto 0!
 BAKAN ESO
 COMPROBEBA QUE
 3 es raíz de $p(x)$
 y que $(x-3) \mid p(x)$

$$\Rightarrow p(x) = (x-3) \underbrace{(x^3 + 6x^2 + 6x + 5)}_{q(x)}$$

Repetimos el proceso para $q(x)$, por el teo de raíz racional las posibles soluciones son

$$\{ \pm 1, \pm 5 \}$$

± 1 no pueden ser raíces pues si fueran, también lo serían para $p(x)$, pero vimos que

$$p(1) \neq 0 \quad \text{y} \quad p(-1) \neq 0$$

Probemos el s y el $-s$

$$q(s) = (s)^3 + 6(s)^2 + 6(s) + s = 12s + 150 + 30 + s = 320 \quad \text{u}$$

$$q(-s) = (-s)^3 + 6(-s)^2 + 6(-s) + s = -12s + 150 - 30 + s = -15s + 150 = 0 \quad \text{u}$$

$\Rightarrow -s$ es raíz de $q(x) \Leftrightarrow (x+s) \mid q(x)$

$$\begin{array}{r} \Rightarrow \quad x^3 + 6x^2 + 6x + s : x + s = x^2 + x + 1 \\ - (x^2 + sx^2) \\ \hline x^2 + 6x + s \\ - (x^2 + sx) \\ \hline x + s \\ - (x + s) \\ \hline 0 \rightarrow \text{BAKAM!} \end{array}$$

$$\Rightarrow p(x) = (x-3)(x+s)(x^2+x+1)$$

Nos falta ver $(x^2 + x + 1)$, veamos por ec de 2º grado

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad y \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(x) &= (x-3)(x+5)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= (x-3)(x+5)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) \\ &= (x-3)(x+5)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

El cual corresponde a su factorización en $\mathbb{C}$

Por otro lado

$$p(x) = (x-3)(x+5)(x^2+x+1) \quad \text{es su factorización en } \mathbb{R}$$

P3 $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$

Se sabe que i es raíz de $p(x)$ de multiplicidad 2

Encontrar todas las raíces

Desarrollo: Como i es raíz y $p(x) \in \mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow -i$ es raíz.

Ahora bien como i tiene multiplicidad 2, $(x-i)$ divide 2 veces a $p(x)$, por lo que $(x+i)$ también divide 2 veces

$$\Rightarrow (x-i)(x-i)(x+i)(x+i) \mid p(x)$$

$$\Leftrightarrow (x-i)^2(x+i)^2 \mid p(x)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)^2 \mid p(x)$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^2+1 \mid p(x)$$

hagamos lo inverso

$$\begin{array}{r}
 x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 : x^4 + 2x^2 + 1 = x^3 - 1 \\
 \underline{-(x^7 + 2x^5 + x^3)} \\
 -x^4 - 2x^2 - 1 \\
 \underline{-(-x^4 - 2x^2 - 1)} \\
 0 //
 \end{array}$$

$$\Rightarrow p(x) = (x-i)^2 (x+i)^2 \underbrace{(x^3 - 1)}_{q(x)}$$

- Veamos las raíces de $q(x) = x^3 - 1$

$$\Rightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 = 1 \rightarrow (\text{raíces cúbicas de la unidad!})$$

$$\Rightarrow x = 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow x^3 - 1 = (x-1)(x - e^{i\frac{2\pi}{3}})(x - e^{i\frac{4\pi}{3}})$$

$$\Rightarrow p(x) = (x-i)^2 (x+i)^2 (x-1)(x - e^{i\frac{2\pi}{3}})(x - e^{i\frac{4\pi}{3}})$$

que es la factorización en $\mathbb{C}$

y sus raíces son	i	con multiplicidad	2	} 7 raíces BAKAN!
	$-i$	"	2	
	1	"	1	
	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$	"	1	
	$e^{i\frac{4\pi}{3}}$	"	1	

Falta la factorización en $\mathbb{R}$

Recordemos que

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2 + 1)^2 (x^3 - 1) \\ &= (x^2 + 1)^2 (x - 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

factorización
de
cubos

que es su factorización en $\mathbb{R}$

- P4**
- 1) $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ monico de $\text{gr}(p) = 3$
 - 2) $(x-1) \mid p(x)$
 - 3) restos de $(x-2), (x-3), (x-4)$ son iguales

de 1) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a=1$ (monico)

$$= x^3 + bx^2 + cx + d$$

¿Es esto necesario? Se viene una
matraca enorme

Replanteemos las cosas p tiene que ser
de grado 3 y debe ser monico. Además $(x-1)$
divide a $p(x)$

$$\Rightarrow p(x) = (x-1)q(x)$$

Luego $q(x)$ debe ser de grado 2 (para que
 $p(x)$ sea de grado 3)

$$\Rightarrow q(x) = ax^2 + bx + c$$

pero Si $a \neq 1 \rightarrow p(x) = ax^3 + \dots$

con $a \neq 1$ y no sería monico

Luego $a = 1$

$$\Rightarrow p(x) = (x-1)(x^2 + bx + c)$$

¡Le bajamos una dimension al problema!

$\Rightarrow$ por teorema del resto

$$p(2) = p(3) = p(4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ec1}} \quad p(2) = (2-1)(4 + 2b + c) = 4 + 2b + c$$

$$\boxed{\text{Ec2}} \quad p(3) = 2(9 + 3b + c) = 18 + 6b + 2c$$

$$\boxed{\text{Ec3}} \quad p(4) = 3(16 + 4b + c) = 48 + 12b + 3c$$

$\Rightarrow$ Ec1 igualando Ec2

$$\Rightarrow 4 + 2b + c = 18 + 6b + 2c$$

$$\Rightarrow 4b + c = -14 \quad (\star)$$

$\Rightarrow$ Ec2 igualando con Ec3

$$18 + 6b + 2c = 48 + 12b + 3c$$

$$\Rightarrow 6b + c = -30 \quad (\star \star)$$

$$\Rightarrow b = -8 \quad y \quad c = 18$$

$$\Rightarrow p(x) = (x-1)(x^2 - 8x + 18)$$

$$= x^3 - 9x^2 + 26x - 18$$

Ahora encontremos las raíces.

Como $(x-1) \mid p(x) \Leftrightarrow x=1$ es raíz

Estudiemos las raíces de $x^2 - 8x + 18$, con fórmula

$$x^2 - 8x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 18}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{8 + \sqrt{64 - 72}}{2}, \quad x_2 = \frac{8 - \sqrt{64 - 72}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{8 + \sqrt{-8}}{2}, \quad x_2 = \frac{8 - \sqrt{8}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 + \sqrt{2}i, \quad x_2 = 4 - \sqrt{2}i$$

Luego las raíces son $1, 4 + \sqrt{2}i, 4 - \sqrt{2}i$

PS $p \in \mathbb{C}[x]$

pdg $p(x)$ es epyectivo $\Leftrightarrow \text{gr}(p) \geq 1$

$\Rightarrow$ pdg p es epyectivo $\Rightarrow \text{gr}(p) \geq 1$

por Contrareciproca, si $\text{gr}(p) < 1$

$$\Rightarrow p(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

$$\text{o } p(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{C}, \text{ con } c \in \mathbb{C} \text{ fijo}$$

Luego, me basta tomar $a \neq c$ y $a \neq 0$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{C} \quad p(x) \neq a \quad \text{pues } p(x) = 0 \text{ o } p(x) = c$$

$\therefore p$ no es epyectivo

$\Leftarrow$ pdg $\text{gr}(p) \geq 1 \Rightarrow p$ es epyectivo

Sea $y_* \in \mathbb{C}$, deberemos encontrar un $x_* \in \mathbb{C}$ tq

$$p(x_*) = y_*$$

Definamos $q(x) = p(x) - y_*$, Como $\text{gr}(p) \geq 1$

$$\Rightarrow \text{gr}(q) \geq 1 \quad (\text{pues } p \text{ y } q \text{ difieren en una cte})$$

Luego por el TEO fundamental del algebra

q tiene una raíz en los complejos

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} \text{ t.q. } q(c) = 0$$

pero $q(c) = p(c) - y_* = 0$

$$\Rightarrow p(c) = y_*$$

Luego me basta tomar $x_* = c$ para obtener un $y \in \mathbb{C}$ ya que

$$p(x_*) = p(c) = y_* //$$

P6 p.d.s $x^2 + x + 1 \mid x^{3n_0} + x^{3n_1+1} + x^{3n_2+2}$

Veamos que las raíces de $x^2 + x + 1$ son raíces de $x^{3n_0} + x^{3n_1+1} + x^{3n_2+2}$

$$\Rightarrow \text{Notemos que } x^2 + x + 1 = 0 \quad / \cdot x$$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 + x = 0$$

restando $\Rightarrow x^3 - 1 = 0$

$$\Rightarrow x^3 = 1$$

Luego las soluciones de $x^2 + x + 1 = 0$

son raíces cúbicas de la unidad pues cumplen $x^3 = 1$

y son $\neq 1$, pues si fuera $= 1$

$$\Rightarrow 1^2 + 1 + 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \leftarrow$$

Luego las soluciones de $x^2+x+1=0$ son raíces cúbicas de la unidad por lo que deben cumplir que $x^3=1$

Además como $x^2+x+1=0$ es de grado 2 hay 2 soluciones, digamos x_1 y x_2

$\Rightarrow$ Sea w una solución cualquiera de $x^2+x+1=0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(w) &= w^{3n_0} + w^{3n_1+1} + w^{3n_2+2} \\ &= (w^3)^{n_0} + (w^3)^{n_1} w + (w^3)^{n_2} w^2 \\ &= 1 + w + w^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

$\swarrow$ pues w es solución de $x^2+x+1=0$

Luego como $w = x_1, x_2 \Rightarrow$ toda raíz de x^2+x+1 es raíz de $x^{3n_0} + x^{3n_1+1} + x^{3n_2+2}$

$\Rightarrow x^2+x+1$ divide a $x^{3n_0} + x^{3n_1+1} + x^{3n_2+2}$

Sección 1... Gracias por tanto, perdón por tan poco. 