MA1101-1 Introducción al Álgebra
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Marcelo Navarro

Auxiliar 14: Polares y Raices

28 de junio de 2017

- Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, en virtud del teorema de pitagoras se define la distancia de z hasta el origen como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Sea $z = a+bi \in \mathbb{C}$, se define su conjugado como $\overline{z} = a - bi$
- si $z = a + bi$. entonces se tiene la siguiente relación con su coordenada polar (r, θ)

$$a = rcos(\theta) \wedge b = rsen(\theta)$$

- $\arg(z)$ es el ángulo de z con el eje real. Se acostumbra a escoger un ángulo en el rango $(-\pi, \pi]$.
- Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Definimos $e^{i\theta}$ como:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

  Dado $z \in \mathbb{C}$ su **forma polar** es $|z|e^{iarg(z)}$
- Sea $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, entonces:
  1. $|e^{i\theta}| = 1$.
  2. $\overline{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$.
  3. $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$.
  4. $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces:
  1. $\overline{\overline{z}} = z$.
  2. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
  3. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$.
  4. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Si $w \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
  5. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}$.
  6. $\mathbb{R}\text{e}(z) = \mathbb{R}\text{e}(\overline{z})$ y $\mathbb{I}\text{m}(z) = -\mathbb{I}\text{m}(\overline{z})$.
  7. $\mathbb{R}\text{e}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $\mathbb{I}\text{m}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
  8. Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\overline{1}}{|z|}e^{-iarg(z)}$
  9. $|z| = |\overline{z}|$
  10. $arg(\overline{z}) = 2\pi - arg(z)$
  11. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
  12. $|zw| = |z||w|$ y $|z + w| \leq |z| + |w|$.
  13. Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
  14. Si $w \neq 0$, entonces $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.
- Si $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$, entonces existe algún $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \varphi + 2k\pi$.
- Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raiz n-ésima de la unidad si $z^n = 1$.
- Las raices n-ésimas de la unidad son de la forma $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
- Sea $z, w \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raiz n-ésima de w si $w^n = 1$.
- Las raices n-ésimas de $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ son de la forma $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
- Sea $n \geq 2$. La suma de las n raíces n-ésimas de la unidad vale 0.

P1. *a)* Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + i)^n + (1 - i)^n \in \mathbb{R}$$

b) Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demuestre que

1) $(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) \in \mathbb{R}$
2) $|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$

P2. Encuentre los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelvan la ecuación:

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = a$$

para $a = \sqrt{3}$ y $a = \sqrt{3}i$

P3. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raiz cubica de la unidad con $w \neq 1$. Pruebe que

$$(1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6 = 62$$

P4. Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1.

P5. Encuentre las raíces cuartas del complejo $z^4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

P6. Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:

$$w_0w_1 + w_1w_2 + \ldots + w_{n-2}w_{n-1} + w_{n-1}w_0 = 0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$$

c) Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Calcule:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (z + w_j)^n$$

Propuestos

P7. **[P1 Control 7, Año 2007]**
Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios (es decir $|z_1| = |z_2| = 1$) tales que:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -u, \quad u \in \mathbb{C} \\ z_1 z_2 &= v, \quad\ \ v \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

a) Pruebe que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.

b) Pruebe que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\dfrac{u}{v}$.

c) Pruebe que $u = \overline{u}v$.

d) Si los ángulos de la forma polar de u y v, son φ y θ respectivamente. Utilice *c*) para demostrar que:

$$\theta = 2\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

P8. Pruebe que el producto de las n raíces n-ésimas de la unidad es igual a $(-1)^{n-1}$